Les graphes à motifs

Didier Caucal

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-RENNES

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 958

Programme 1

LES GRAPHES A MOTIFS

Didier CAUCAL

Décembre 1988

RR_0958

LES GRAPHES A MOTIFS

Didier CAUCAL

Publication Interne n° 441

Décembre 1988

IRISA

INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE
ET SYSTÈMES ALÉATOIRES

Campus Universitaire de Beaulieu
35042 - RENNES CÉDEX
FRANCE
Téléphone : 99 36 20 00
Télex : UNIRISA 950 473 F
Télécopie : 99 38 38 32

Les graphes à motifs

Didier CAUCAL

IRISA , Campus de Beaulieu , F35042 Rennes-Cédex , France

Publication Interne n° 441 - Décembre 1988 - 46 Pages

Résumé . Un graphe à motifs est un graphe produit à partir d'un graphe fini en itérant l'adjonction parallèle et déterministe d'une famille finie de graphes finis (les motifs). On établit la version effective de la caractérisation de Muller et Schupp [Mu-Sc 85] : les graphes des transitions des automates à pile sont les graphes à motifs à une racine et localement finis, et à partir d'un automate à pile, on peut extraire effectivement un système de motifs du graphe des transitions de l'automate.

Pattern graphs

Abstract . A pattern graph is a graph produced from a finite graph by iterating the addition of a finite family of finite graphs (the patterns). We show the effective version of the characterisation of Muller and Schupp [Mu-Sc 85] : the transition graphs of pushdown automata are the locally finite pattern graphs with a root, and from a pushdown automaton, we can effectively extract a system of patterns generating the transition graph of the automaton.

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
(L. A. 227)
UNIVERSITÉ DE RENNES 1 I. N. S. A. DE RENNES

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
(LABORATOIRE DE RENNES)

Introduction

Notre but est de définir une stratégie parallèle et optimale pour le calcul des fonctions (du premier ordre) définies par les schémas de programmes récursifs, en abrégé SPR, introduits par Nivat [Ni 75]. Un exemple de SPR est le système à la seule équation suivante

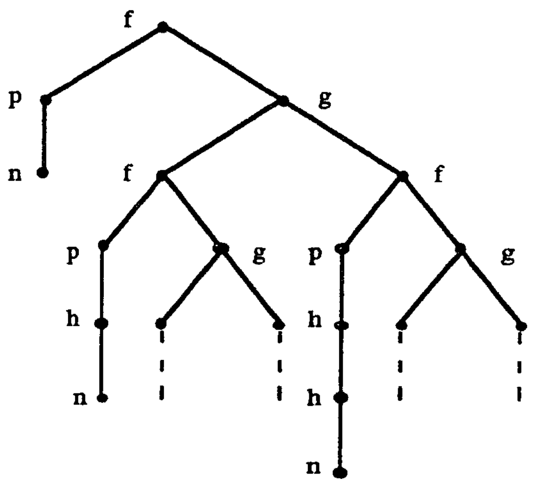
$$F(n) = f(\, p(n) \,,\, g(\, F(h(n)) \,,\, F(h(h(n))) \,)\,)$$

(où f,g,p,h sont des symboles de fonctions de base d'arités respectives 2,2,1,1)

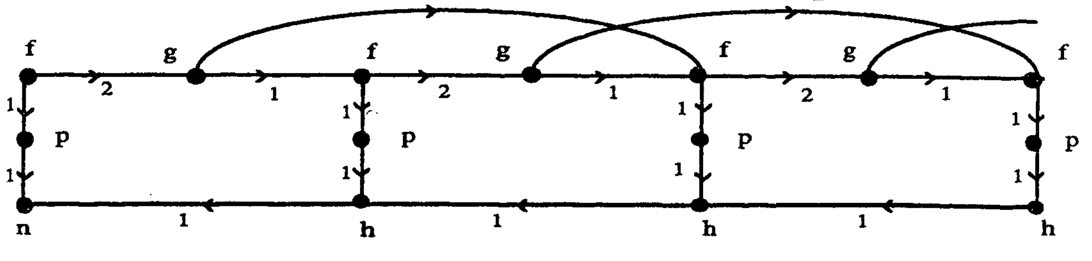
dont une interprétation est la fonction de Fibonacci

$$F(n) = \text{si } n \leq 1 \text{ alors } 1 \text{ sinon } F(n-1) + F(n-2) \text{ fsi}.$$

A chaque fonction définie, on peut associer l'arbre des appels (par nom) des fonctions de base, obtenu par dépliage itéré des membres droits du SPR, à partir de la fonction définie. Cet arbre syntaxique pour F(n) est représentable comme suit

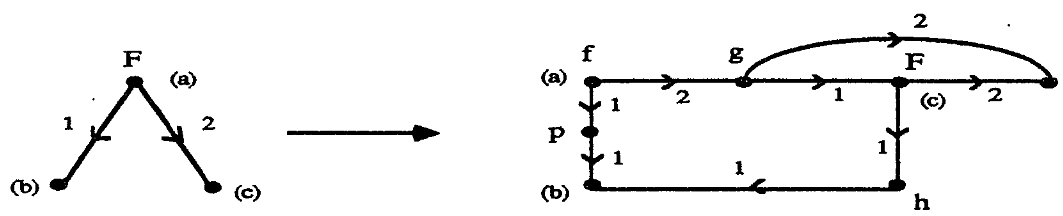


Cet arbre syntaxique donne l'ensemble de tous les chemins de calcul possibles de la fonction définie. Une stratégie optimale de développement de l'arbre syntaxique a été envisagée par Berry et Levy [Be-Le 79]. D'autres améliorations dans cette direction peuvent être accomplies en considérant le graphe canonique [Ca 88 b] de l'arbre syntaxique, défini par identification des nœuds ayant des sous-arbres identiques. En continuant l'exemple, on obtient le graphe canonique suivant :

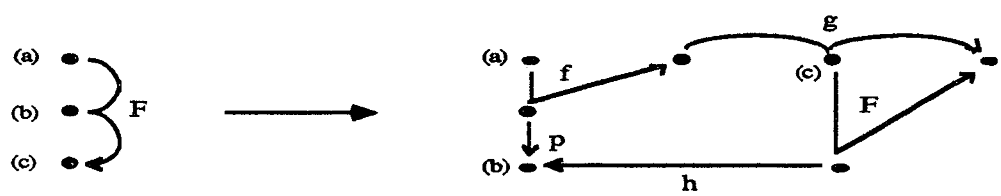


Pour une stratégie optimale d'évaluation des SPR et dans un contexte où les calculs correspondent à des développements de graphes, on considère deux sous-buts.

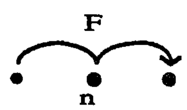
Tout d'abord, on désire montrer que le graphe canonique d'un (d'une fonction définie par) SPR est un graphe à motifs, c'est à dire un graphe pouvant être produit à partir d'un graphe fini en itérant l'adjonction parallèle et déterministe d'une famille finie de graphes finis. Cette adjonction itérative est réalisée par dérivations parallèles selon une grammaire d'hypergraphes [Ba-Co 87] [Ha-Kr 87] associant un unique hypergraphe par symbole inconnu. Le graphe canonique de l'exemple est engendré selon la grammaire à la seule règle suivante :



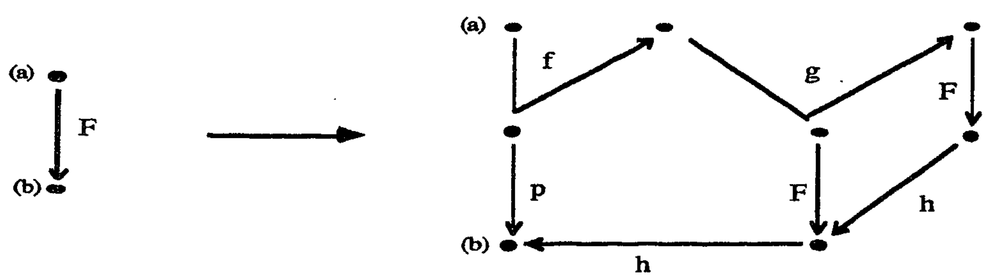
ou plutôt



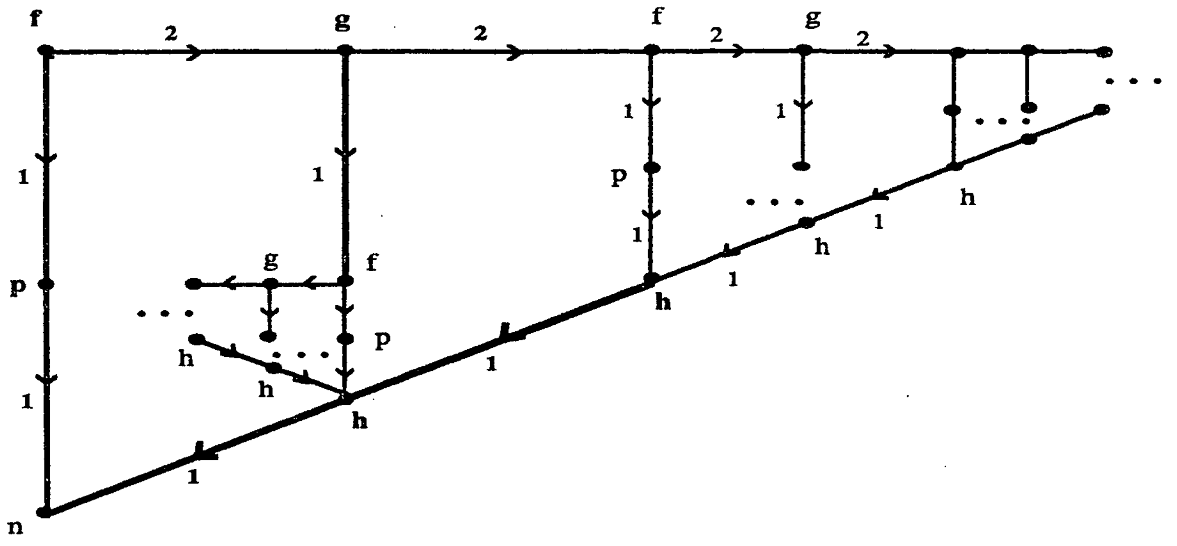
et à partir de l'hypergraphe



Ensuite, on désire obtenir une construction effective d'un système de motifs du graphe canonique d'un SPR. Notons que l'arbre solution d'un SPR se réduit [Ca 88 b] à l'hypergraphe à motifs du système obtenu en remplaçant le membre droit de chaque règle du SPR par son graphe canonique. En continuant l'exemple, on a le système à la seule règle suivante :



et dont le graphe à motifs à partir de $\bullet \xrightarrow[F]{} \bullet_n$ est représentable par



Ces motivations justifient d'introduire les hypergraphes à motifs. Après de brefs préliminaires (en 1.) et des propriétés de base des hypergraphes (en 2.), on définit (en 3.) un hypergraphe à motifs par récriture parallèle itérée d'un hypergraphe fini selon un système de motifs. On caractérise (en 4.) les hypergraphes à motifs connexes et localement finis comme plus petits points fixes de leurs systèmes de motifs, pour la relation de plongement composante à composante. On établit (en 5.) l'existence de systèmes de motifs uniformes pour générer les hypergraphes connexes et localement finis. On définit (en 6.) les graphes des transitions des systèmes de récriture suffixe de mots pour établir (en 7.) la version effective du théorème de Muller et Schupp [Mu-Sc 85], à savoir : les graphes des transitions des automates à pile sont les graphes à motifs à une racine et localement finis, et on peut extraire de façon effective un système de motifs du graphe des transitions d'un automate à pile, et ce à partir des règles de l'automate. On définit (en 8.) un langage à motifs comme le langage des étiquettes de chemins d'un graphe à motifs, et on montre que la classe des langages à motifs est exactement celle des langages algébriques.

1. Préliminaires

Etant donné un ensemble E, on note 2^E l'ensemble des parties de E, et $\#E$ le cardinal de E. Etant donné une partie A de 2^F, on note $\cup A = \{ x \in B \mid B \in A \}$ la partie de F réunion de A. Etant donné une relation $R \subseteq E\text{x}F$, on pourra noter $x R y$ au lieu de $(x,y) \in R$, et l'inverse de R est $R^{-1} = \{ (y,x) \mid x R y \}$. Par abus de notation, on pourra écrire x à la place de $\{x\}$. L'image $R(A)$ d'un ensemble A par R est $\{y \mid \exists\, x \in A , x R y \}$ et la restriction de R à A est $R|_A = \{ (x,y) \in R \mid x \in A\}$. On note $Dom(R) = R^{-1}(F)$ le domaine de R et $Im(R) = R(E)$ l'image de R. La relation identité sur E est notée $id_E = \{ (x,x) \mid x \in E \}$. La composée d'une relation R de $E\text{x}F$ par une relation S de $F\text{x}G$ est la relation $R \circ S = \{ (x,y) \mid \exists\, z \in F,\ x R z \text{ et } z S y \}$. Le noyau d'une relation R est défini par la relation $Ker(R) = R \circ R^{-1} = \{ (x,y) \mid R(x) \cap R(y) \neq \varnothing \}$. Une relation R est fonctionnelle (ou est une fonction) si $Ker(R^{-1}) \subseteq id_F$, c'est-à-dire l'image $R(x)$ d'un élément x de $Dom(R)$ a un seul élément ; on pourra noter $R : E \rightarrow F$. Une fonction R de E dans F est totale si $Dom(R) = E$. Une relation R est une bijection si R et R^{-1} sont des fonctions totales. Une relation R est injective si $Ker(R) \subseteq id_E$, i.e. R^{-1} est une fonction. On dit que R est localement fini si pour tout x de E, $R(x)$ est fini. Un ensemble E est dénombrable s'il existe une bijection de E sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

Considérons le monoïde $(2^{E\text{x}E}, \circ)$ des relations binaires sur E, d'élément neutre id_E. Une relation R est un préordre si elle est réflexive ($id_E \subseteq R$) et transitive ($R \circ R \subseteq R$) ; une équivalence est un préordre symétrique ($R^{-1} \subseteq R$). La fermeture réflexive et transitive de R pour la loi $\circ$ est la relation $R^* = \cup\{ R^i \mid i \geq 0 \}$ avec $R^0 = id_E$ et $R^{i+1} = R^i \circ R$.

Soit $(X^*,.)$ le monoïde libre engendré par un ensemble X de symboles, dits lettres. Son élément neutre est noté ε. Un mot sur X est un élément de X^* et un langage sur X est une partie de X^*. Etant donné un mot u sur X, on note $|u|$ la longueur de u, c'est à dire le nombre d'occurrences de lettres de u, et la i^{eme} lettre de u est désignée par $u(i)$.

2. Hypergraphes

Dorénavant F est un ensemble fini de symboles, gradué par une fonction totale ρ de F dans $\mathbb{N}-\{0\}$. Etant donné un ensemble S quelconque, on définit le langage F(S) sur $F \cup S$ comme suit :

$$F(S) = \{ fs_1 \ldots s_{\rho(f)} \mid f \in F \text{ et } s_1, \ldots, s_{\rho(f)} \in S \} .$$

On considère les hypergraphes à hyperarcs bien étiquetés, au sens où l'arité de l'étiquette d'un hyperarc est égale au nombre d'occurrences de ses sommets.

Définition. Un *hypergraphe* sur F est une partie de F(S) pour S quelconque .

Soient S l'ensemble des entiers naturels et $F = \{f,g,a\}$ avec $\rho(f)=4$, $\rho(g)=2$, $\rho(a)=1$.

Soit $G = \{ f(2i)(2i+1)(2i+1)(2i+2) \mid i \geq 0 \} \cup \{ g(2i+3)(2i+1) \mid i \geq 0 \} \cup \{a1\}$

G est un hypergraphe sur F de représentation

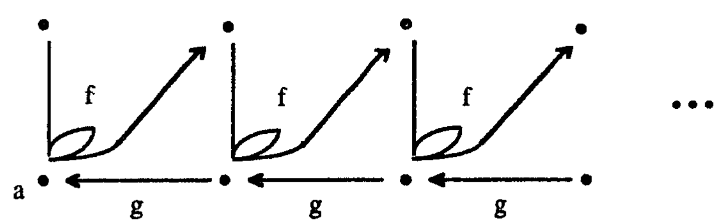


Fig 2.1 . Hypergraphe .

Dorénavant S est un ensemble dénombrable et tout hypergraphe G est une partie de F(S) . Les *hyperarcs* de G sont les éléments de G . L'ensemble S_G des *sommets* de G est l'ensemble des éléments de S dans G , c'est-à-dire $S_G = \{ u(i) \mid u \in G \text{ et } 2 \leq i \leq |u| \}$. Un hyperarc $fs_1 \ldots s_n$ est d'*étiquette* f et de *degré* $n = \rho(f)$. Un hyperarc fs de degré 1 correspond à étiqueter le sommet s par f . Un *graphe* sur F est un hypergraphe sur F dont les hyperarcs sont de degré 1 ou 2 . La relation successeur de G est définie par

$$Succ_G = \{ (u(i),u(j)) \mid u \in G \text{ et } 2 \leq i < j \leq |u| \} .$$

Un hypergraphe G est *connexe* si $S_G \times S_G = (Succ_G \cup (Succ_G)^{-1})^*$, est *localement fini* si la relation $Succ_G \cup (Succ_G)^{-1}$ est localement finie, et est *à une racine* et de racine $r \in S_G$ si $(Succ_G)^*(r) = S_G$. L'*image* de G par une relation R binaire sur S est l'hypergraphe

$$R[G] = \{ ft_1 \ldots t_{\rho(f)} \mid \exists\, fs_1 \ldots s_{\rho(f)} \in G \ : \ s_i R t_i\, ,\ 1 \leq i \leq \rho(f) \}\, .$$

Lemme 2.1 . Etant donné une relation R binaire sur S et une suite $(G_n)_n$ d'hypergraphes, on a $R[\cup_n G_n] = \cup_n R[G_n]$.

La *restriction* de G à une partie A de S est l'hypergraphe $G|_A = id_A[G] = G \cap F(A)$. Un hypergraphe G est plongé dans un hypergraphe H si à un renommage des sommets près (à isomorphisme près), G est inclus dans H .

Définition. Un *plongement* d'un hypergraphe G dans un hypergraphe H est une fonction $h : S_G \to S_H$ totale et injective telle que $h[G] \subseteq H$; G est dit plongé (resp. selon h) dans H et on note $G \sqsubseteq H$ (resp. $G \sqsubseteq_h H$) . Si en plus $h[G] = H$ alors G est dit *isomorphe* à H (resp. selon h) et on note $G \leftrightarrow H$ (resp. $G \leftrightarrow_h H$) .

On remarquera que $G \subseteq H$ si et seulement si $G \sqsubseteq_{id_{S_G}} H$. La relation de plongement est un préordre sur l'ensemble des hypergraphes sur F .

Lemme 2.2 . a) $G \leftrightarrow_h H$ ssi $G \sqsubseteq_h H$ et $H \sqsubseteq_{h^{-1}} G$.

b) si $G \sqsubseteq_f H$ et $H \sqsubseteq_g K$ alors $G \sqsubseteq_{f \circ g} K$.

La preuve ne présente pas de difficulté. La figure 2.2 donne un exemple de deux graphes (infinis) plongés l'un dans l'autre mais non isomorphes.

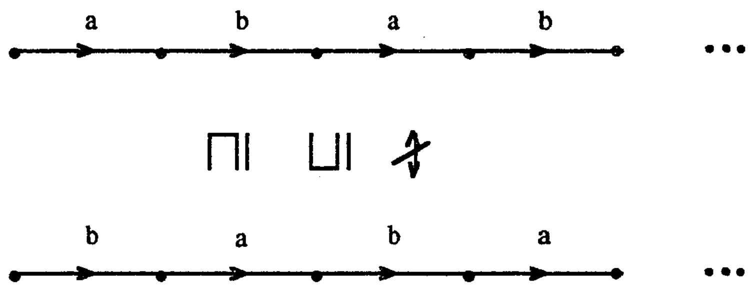


Fig 2.2 . Non antisymétrie du plongement .

A tout hypergraphe G , on associe l'application $d_G : S_G \times S_G \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ définie par

$$d_G(s,t) = \inf (\{ n \mid (s,t) \in (Succ_G \cup Succ_G^{-1})^n \} \cup \{\infty\}) .$$

Si G est connexe alors d_G est une distance sur S_G . Le lemme suivant indique le caractère contractant d'un plongement.

Lemme 2.3 . Si $G \sqsubseteq_g H$ alors $d_H(g(s),g(t)) \leq d_G(s,t)$.

Donnons une condition générale pour que deux hypergraphes plongés l'un dans l'autre soient isomorphes.

Lemme 2.4 . Soient G et H des hypergraphes sur F tels que $H \sqsubseteq_h G \sqsubseteq_g H$.
On a $G \leftrightarrow_g H$ si un des deux cas suivants est satisfait :

a) S_G est fini

b) G est connexe et localement fini, et $g \circ h$ admet un point fixe.

Preuve.

i) Cas où S_G est fini. D'après le lemme 2.2 b , on a $G \sqsubseteq_{g \circ h} G$. Comme S_G est fini, $g \circ h$ est surjective. Aussi $g \circ h$ est une bijection de S_G sur S_G . Par conséquent, il existe un entier n non nul tel que $(g \circ h)^n = id_{S_G}$. Comme h est injective et totale, $Ker(h) = h \circ h^{-1} = id_{S_H}$, donc

$(h \circ g)^n = (h \circ g)^n \circ (h \circ h^{-1}) = h \circ (g \circ h)^n \circ h^{-1} = h \circ h^{-1} = id_{S_H}$.

D'où $H = (h \circ g)^n[H] \subseteq g[G] \subseteq H$; ainsi $g[G] = H$, d'où $G \leftrightarrow_g H$.

ii) Supposons $H \sqsubseteq_h G \sqsubseteq_g H$, G connexe et localement fini, et $g \circ h$ admet un point fixe s_0.

Par le lemme 2.3, on obtient pour tout entier n , $H_n \sqsubseteq_{h_n} G_n \sqsubseteq_{g_n} H_n$ avec $G_n = G|_{\{s \mid d_G(s,s_0) \leq n\}}$, $H_n = H|_{\{s \mid d_H(s,g(s_0)) \leq n\}}$, $g_n = g|_{S_{G_n}}$ et $h_n = h|_{S_{H_n}}$. Comme G est localement fini, S_{G_n} est fini et par i) , $G_n \leftrightarrow_{g_n} H_n$. Par conséquent S_{H_n} est fini et par i) , $H_n \leftrightarrow_{h_n} G_n$.

Par le lemme 2.2 b , $G_n \leftrightarrow_{g_n \circ h_n} G_n$ et en particulier $(g_n \circ h_n)[G_n] = G_n$.

Aussi $G_n = h_n[g_n[G_n]] \subseteq h_n[H_n] \subseteq h[H]$,

et par connexité de G , $G = \cup_n G_n \subseteq h[H]$. Comme $H \sqsubseteq_h G$, on a $H \leftrightarrow_h G$. Aussi H est connexe et localement fini et comme $h \circ g$ a pour point fixe $g(s_0)$, on a de façon symétrique , $G \leftrightarrow_g H$. ◆

3. Définition des hypergraphes à motifs

Un système de motifs est une grammaire fonctionnelle d'hypergraphes.

Définition. Un *système* $\mathbb{S}$ sur F est une relation binaire sur $2^{F(S)}$ telle que

(i) $\forall\, G \in Dom(\mathbb{S})$, $\#G = 1$

(ii) $\forall\, \{X\} \in Dom(\mathbb{S})$, $\#S_X = |X|\text{-}1$

(iii) $\#\mathbb{S} = \#I(\mathbb{S})$ avec $I(\mathbb{S}) = \{\, X(1) \mid \{X\} \in Dom(\mathbb{S}) \,\}$.

Un *système de motifs* $\mathbb{S}$ sur F est un système sur F tel que

$$\#\mathbb{S} < \infty \text{ et } \forall\, G \in Im(\mathbb{S}) ,\ \#G < \infty .$$

Aussi un système sur F est une relation binaire sur l'ensemble des hypergraphes sur F telle que tout hypergraphe du domaine est réduit à un hyperarc (i) dont les sommets sont distincts (ii). La condition (iii) impose une unique règle par élément de l'ensemble $I(\mathbb{S})$ des *inconnues* de $\mathbb{S}$. Pour toute règle (X,G) de $\mathbb{S}$, S_X est l'*entrée* de G selon $X(1)$, et S_Y pour $Y \in G$ et $Y(1) \in I(\mathbb{S})$ est une *sortie* de G selon $Y(1)$. On remarquera que l'entrée S_X de G selon $X(1)$ peut être non incluse dans S_G . La figure 3.1 donne un exemple d'un système de motifs. Un sommet s pourra être représenté par (s) .

Soit le système de deux motifs suivant :

$\mathbb{S} = \{\, (Ast\ ,\ \{1st,1vt,2su,Buv,fs,hv\}\,)\ ,\ (\,Bxy\ ,\ \{1xy,2xz,Azy,gx\}\,)\,\}$

Les éléments de $I(\mathbb{S})$ sont A et B d'arités 2 .

$\mathbb{S}$ est représenté comme suit :

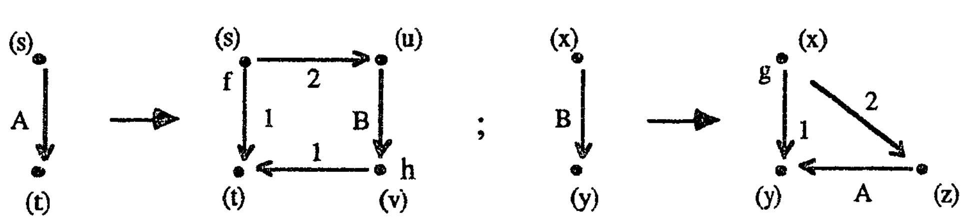


Fig. 3.1 . Système de motifs .

Deux systèmes sont équivalents s'ils ont le même ensemble d'inconnues et leurs règles associées à une même inconnue sont isomorphes.

Définition. Deux systèmes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des *systèmes équivalents*, et on note $\mathcal{S} \equiv \mathcal{T}$ s'ils vérifient les deux conditions suivantes :

(i) $I(\mathcal{S}) = I(\mathcal{T})$

(ii) Pour tout (X,G) de $\mathcal{S}$ et pour tout (Y,H) de $\mathcal{T}$ tel que $X(1) = Y(1)$, il existe une bijection f de $S_X \cup S_G$ sur $S_Y \cup S_H$ telle que $f[X] = Y$ et $f[G] = H$.

Par exemple, le système $\mathcal{S} = \{\ (\varphi st, \{as,au\})\ \}$ n'est pas équivalent au système $\mathcal{T} = \{(\varphi xy, \{ax,ay\})\}$. Pour toute règle (X,G) de $\mathcal{S}$ telle que S_X est inclus dans S_G, la condition (ii) de la définition devient $\forall\ (Y,H) \in \mathcal{T}\ :\ X(1) = Y(1)\ ,\ \exists\ f\ :\ G \leftrightarrow_f H$ et $f[X] = Y$.

La relation $\equiv$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des systèmes sur F.

Dorénavant $\mathcal{S}$ est un système sur F. La récriture d'hypergraphes est une succession de remplacements d'un hyperarc d'étiquette inconnue par son hypergraphe associé dans $\mathcal{S}$.

Définition. Un hypergraphe M *se récrit immédiatement* en un hypergraphe N selon un hyperarc X de M, et on note $M \rightarrow_{\{X\}} N$ si

$N = (M\text{-}\{X\}) \cup g[G]$ avec

$(Y,G) \in \mathcal{S}$ et $Y(1) = X(1)$

g est une fonction totale de $S_G \cup S_Y$ dans S telle que

$g[Y] = X$ et $g|_{S_G\text{-}S_Y}$ est injective et d'image disjointe de S_M.

La récriture immédiate est étendue aux ensembles d'hyperarcs.

Définition. Un hypergraphe M *se récrit immédiatement* en un hypergraphe N selon une partie H de $M \cap I(\mathcal{S})(S)$, et on note $M \rightarrow_H N$, s'il existe une famille $(N_X)_{X \in H}$ d'hypergraphes telle que

$N = (M\text{-}H) \cup \bigcup\{\ N_X \mid X \in H\ \}$

$$\{X\} \to_{\{X\}} N_X \ , \ (S_{N_X}\text{-}S_X) \cap S_M = \emptyset \ , \ (S_{N_X}\text{-}S_X) \cap S_{N_Y} = \emptyset \text{ si } X \neq Y$$

En particulier $\to_\emptyset$ est la relation d'identité. On écrira $\to_{H,\mathcal{S}}$ si le système $\mathcal{S}$ doit être précisé. Donnons quatre propriétés de base de la récriture immédiate.

Lemme 3.1 . On a les propriétés suivantes :

a) $\to_H \; = \; \to_{\{X\}} \circ \to_{H - \{X\}}$ pour $X \in H$.

b) si $M \to_H O$, $M \leftrightarrow_f N$, $N \to_{f[H]} P$ alors $\exists\, g : O \leftrightarrow_g P$ et $g|_{S_M} = f$.

c) si $M \to_H N \leftrightarrow_f O$ alors $f[M] \to_{f[H]} O$.

d) si $\mathcal{S} \equiv \mathcal{T}$ alors $\to_{H,\mathcal{S}} = \to_{H,\mathcal{T}}$.

La preuve de ce lemme est une simple conséquence des définitions précédentes. La récriture parallèle immédiate est la récriture immédiate selon tous les hyperarcs inconnus.

Définition. La *récriture parallèle immédiate* selon un système $\mathcal{S}$ sur F , notée $\to$ ou $\to_{\mathcal{S}}$, est la relation binaire sur l'ensemble des hypergraphes sur F , définie par

$$M \to N \text{ ssi } M \to_H N \text{ avec } H = M \cap I(\mathcal{S})(S) \ .$$

Les récritures parallèles immédiates successives à partir de l'hypergraphe { Aab , Bbc , vc } et selon le système de la figure 3.1 sont représentées ci-dessous :

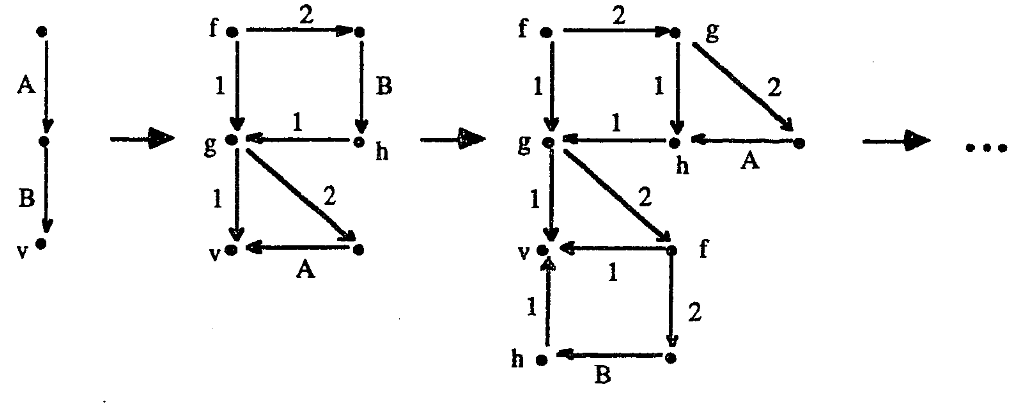


Fig. 3.2 . Récritures parallèles immédiates .

Un hypergraphe à motifs est obtenu à partir d'un système $\mathbb{S}$ de motifs en itérant les récritures parallèles immédiates à partir d'un hyperarc du domaine de $\mathbb{S}$.

Définition. Un *itéré* $\mathbb{S}^*$ d'un système $\mathbb{S}$ est un système vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) $I(\mathbb{S}^*) = I(\mathbb{S})$

(ii) $\forall\ (X,G) \in \mathbb{S}^*\ ,\ \exists\ (N_n)_n\ :\ N_0 = X\ ,\ N_n \rightarrow_{\mathbb{S}} N_{n+1}\ ,\ G = U_n(N_n - I(\mathbb{S})(S))$.

Un hypergraphe G est un *hypergraphe à motifs* s'il existe un itéré $\mathbb{S}^*$ d'un système $\mathbb{S}$ de motifs tel que $G \in Im(\mathbb{S}^*)$.

Considérons le système $\mathbb{S}$ de la fig. 3.1 et le système $\mathcal{T} = \mathbb{S} \cup \{ (Cxy,\{Axy,vy\}) \}$.

Soit (Cxy,H) une règle d'un itéré de $\mathcal{T}$. Le graphe à motifs H a comme représentation

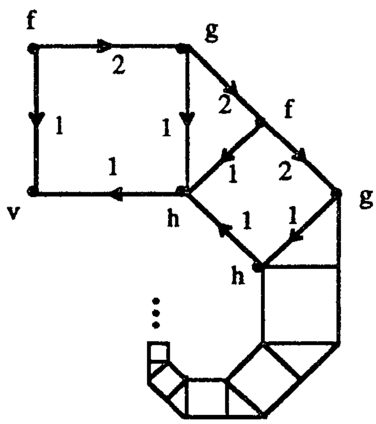


Fig. 3.3 . Graphe à motifs .

Tout système admet un itéré. L'ensemble des itérés d'un système est une classe pour l'équivalence des systèmes. Deux systèmes équivalents ont un même ensemble d'itérés. La récriture parallèle immédiate selon un itéré d'un système $\mathbb{S}$ est invariante par composition avec la récriture parallèle immédiate selon $\mathbb{S}$.

Lemme 3.2 . Soient $E(\mathbb{S})$ l'ensemble des itérés d'un système $\mathbb{S}$ et $\mathbb{S}^*$ un itéré de $\mathbb{S}$.

a) $E(\mathbb{S}) = \equiv(\mathbb{S}^*)$ et $E(\mathbb{S}) = E(\mathbb{T})$ pour $\mathbb{S} \equiv \mathbb{T}$.

b) $\rightarrow_{\mathbb{S}^*} = \rightarrow_{\mathbb{S}} \circ \rightarrow_{\mathbb{S}^*}$

Preuve.

Par le lemme 3.1 b et le lemme 2.1, les systèmes de $E(\mathbb{S})$ sont équivalents. Par le lemme 2.1 et le lemme 3.1 c, $E(\mathbb{S})$ est fermé pour $\equiv$. Par conséquent et par le lemme 3.1 d, on en déduit que $E(\mathbb{S})$ est égal à $E(\mathbb{T})$ pour $\mathbb{S} \equiv \mathbb{T}$. La preuve du lemme 3.2 b ne présente pas de difficulté. ◆

4. Caractérisation équationnelle des hypergraphes à motifs

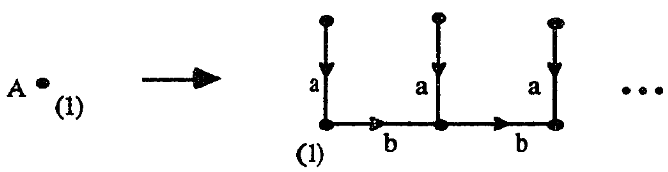
On montre que les itérés d'un système $\mathcal{S}$ sont des plus petits points fixes de $\mathcal{S}$ pour les relations de plongement composante à composante, respectant et ne respectant pas les entrées. L'unicité (à équivalence près) est établie pour les systèmes dont les itérés sont connexes et localement finis.

Définition. Un *point fixe* $\mathcal{T}$ d'un système $\mathcal{S}$ est un système tel que

$$I(\mathcal{T}) = I(\mathcal{S}) \quad \text{et} \quad \mathcal{T} \subset \longrightarrow_{\mathcal{S}} \circ \longrightarrow_{\mathcal{T}}$$

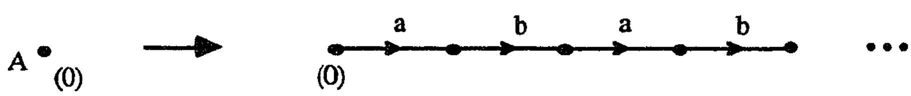
Soit le système de motifs $\mathcal{S} = \{ (Ax, \{ayx, bxz, Az\}) \}$ de représentation

Le système $\{ (A1, \{a(2n)(2n+1) \mid n \geq 0\} \cup \{b(2n+1)(2n+3) \mid n \geq 0\}) \}$ de représentation



est point fixe de $\mathcal{S}$.

Le système $\{ (A0, \{a(2n)(2n+1) \mid n \geq 0\} \cup \{b(2n+1)(2n+2) \mid n \geq 0\}) \}$ de représentation



n'est pas point fixe de $\mathcal{S}$.

Fig. 4.1 . Point fixe de système .

Les systèmes à un seul (à équivalence près) point fixe sont les systèmes nœthériens : un système $\mathcal{S}$ est nœthérien si $\longrightarrow_{\mathcal{S}}$ l'est.

Définition. Un système $\mathbb{S}$ est *nœthérien* s'il existe un entier n tel que

$$(\rightarrow_{\mathbb{S}})^n(\mathrm{Dom}(\mathbb{S})) \cap I(\mathbb{S})(S) = \emptyset .$$

Exemple : Considérons le système non nœthérien $\mathbb{S} = \{ (\{Ax\},\{axy,Ay\}) \}$ et un itéré $\mathcal{T} = \{(X,G)\}$ de $\mathbb{S}$. Soit un ensemble dénombrable $\{s_i \in S \mid i \geq 1 \}$ disjoint de S_G . Les systèmes $\mathcal{T}_n = \{ (X,G \cup \{bs_i \mid 1 \leq i \leq n \}) \}$ sont des systèmes non équivalents deux à deux, et sont des points fixes du système $\mathbb{S}$.

Proposition 4.1 . *Tout itéré d'un système est un point fixe du système .*

Les points fixes d'un système nœthérien sont les itérés de ce système .

Un système non nœthérien admet une infinité de points fixes non équivalents.

Preuve.

Par le lemme 3.2 b, tout itéré d'un système est un point fixe de ce système.

Soit un point fixe $\mathcal{T}$ d'un système $\mathbb{S}$ nœthérien. Comme $\mathcal{T} \subseteq \rightarrow_{\mathbb{S}} \circ \rightarrow_{\mathcal{T}}$, on a par itérations, $\mathcal{T} \subseteq (\rightarrow_{\mathbb{S}})^n \circ \rightarrow_{\mathcal{T}}$ pour un entier n tel que $(\rightarrow_{\mathbb{S}})^n(\mathrm{Dom}(\mathbb{S})) \cap I(\mathbb{S})(S) = \emptyset$. Aussi $\mathcal{T} \subseteq (\rightarrow_{\mathbb{S}})^n$ et même $\mathcal{T} \subseteq (\rightarrow_{\mathbb{S}})^n \circ \rightarrow_{\mathbb{S}^*}$ pour un itéré $\mathbb{S}^*$ de $\mathbb{S}$. Par le lemme 3.2 b , $\mathcal{T} \subseteq \rightarrow_{\mathbb{S}^*}$ i.e. $\mathcal{T}$ est un itéré de $\mathbb{S}$.

Soit un système $\mathbb{S}$ non nœthérien. Il existe $\varphi \in I(\mathbb{S})$ et un entier n tels que $G\,(\rightarrow_{\mathbb{S}})^n\,K$ et $\{\varphi\}(S) \cap K \neq \emptyset$ avec $\{X\}\,\mathbb{S}\,G$ et $X(1) = \varphi$. Pour tout hypergraphe H tel que $S_G \cap S_H = \emptyset$, on définit le système $\mathbb{S}_H = (\mathbb{S}-\{(\{X\},G)\}) \cup \{(\{X\},G \cup H)\}$ et on considère un itéré $\mathcal{T}_H$ de $\mathbb{S}_H$. On vérifiera que l'on peut extraire une famille infinie de systèmes $\mathcal{T}_H$ qui soient non équivalents deux à deux, et que $\rightarrow_{\mathbb{S}_H} \circ \rightarrow_{\mathcal{T}_H} = \rightarrow_{\mathbb{S}} \circ \rightarrow_{\mathcal{T}_H}$. Comme $\mathcal{T}_H$ est un point fixe de $\mathbb{S}_H$ et de la dernière égalité, on obtient que $\mathcal{T}_H$ est un point fixe de $\mathbb{S}$. ♦

Pour caractériser les itérés de $\mathbb{S}$ en tant que points fixes de $\mathbb{S}$, on se restreint aux plus petits points fixes de $\mathbb{S}$ pour les préordres suivants : les relations de plongement et de plongement faible sont les relations de plongement composante à composante, respectant et ne respectant pas les entrées.

Définition. Un système $\mathcal{S}$ est *plongé* [resp. *plongé faiblement*] dans un système $\mathcal{T}$, et on note $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{T}$ [resp. $\mathcal{S} \overset{\circ}{\leq} \mathcal{T}$], si les conditions (i) et (ii) [resp. (i) et (iii)] suivantes sont vérifiées :

(i) $I(\mathcal{S}) = I(\mathcal{T})$

(ii) Pour tout (X,G) de $\mathcal{S}$ et pour tout (Y,H) de $\mathcal{T}$ tel que $X(1) = Y(1)$, il existe une injection totale f de $S_X \cup S_G$ dans $S_Y \cup S_H$ telle que $f[X] = Y$ et $f[G] \subseteq H$.

(iii) $\forall (X,G) \in \mathcal{S}$, $\forall (Y,H) \in \mathcal{T}$: $X(1) = Y(1)$, $G \sqsubseteq H$.

Pour les préordres $\sqsubseteq$ et $\leq$, les itérés d'un système sont des plus petits points fixes du système.

Théorème 4.1 . *Tout itéré d'un système est un plus petit point fixe du système pour les relations de plongement et de plongement faible.*

Preuve.

Considérons un itéré $\mathcal{S}^*$ d'un système $\mathcal{S}$. D'après la proposition 4.1 (ou par le lemme 3.2 b), $\mathcal{S}^*$ est un point fixe de $\mathcal{S}$. Soit $\mathcal{T}$ un point fixe de $\mathcal{S}$ et montrons que $\mathcal{S}^* \sqsubseteq \mathcal{T}$. On a $I(\mathcal{T}) = I(\mathcal{S})$ et $\mathcal{T} \subseteq \to_{\mathcal{S}} \circ \to_{\mathcal{T}}$. Aussi $\to_{\mathcal{T}} \subseteq \to_{\mathcal{S}} \circ \to_{\mathcal{T}}$. Par itérations et pour tout (X,G) de $\mathcal{T}$, il existe une suite $(N_{X,n})_n$ telle que $N_{X,0} = X$, $N_{X,n} \to_{\mathcal{S}} N_{X,n+1}$, $N_{X,n} \to_{\mathcal{T}} G$. D'où

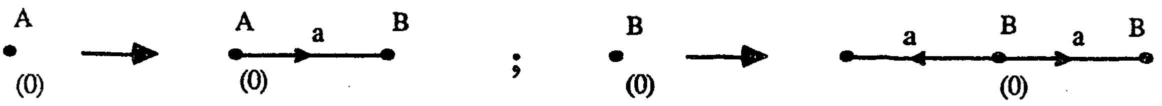
$$N_{X,n} - I(\mathcal{S})(S) \subseteq G \quad \text{et} \quad N_X = \cup_n(N_{X,n} - I(\mathcal{S})(S)) \subseteq G .$$

Posons $\mathcal{U} = \{ (X,N_X) \mid X \in Dom(\mathcal{T}) \}$. On a $\mathcal{U} \sqsubseteq \mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$ est un itéré de $\mathcal{S}$. Par le lemme 3.2 a et par $\equiv \subseteq \sqsubseteq$, on en déduit que $\mathcal{S}^* \sqsubseteq \mathcal{T}$. De plus $\sqsubseteq \subseteq \leq$ donc $\mathcal{S}^* \leq \mathcal{T}$. ♦

Il existe des systèmes à plusieurs plus petits points fixes (figures 4.2 et 4.3). Pour caractériser en terme de plus petit point fixe les itérés, et en particulier les hypergraphes à motifs, on se restreint à une classe de systèmes à unique plus petit point fixe.

Définition. Un système $\mathcal{S}$ est *connexe* [resp. *localement fini*] si tout hypergraphe de $Im(\mathcal{S})$ est connexe [resp. localement fini] .

Soit le système $\mathcal{S}$ = { (A0 , {A0,a01,B1}) , (B0 , {B0,B1,a01,a02}) } de représentation



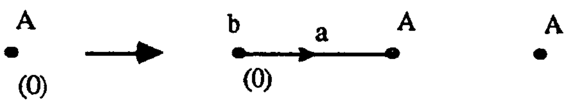
Soit $\mathcal{S}^*$ un itéré de $\mathcal{S}$ et de même domaine.

Considérons un système $\mathcal{T}$ = { (A0 , G) , (B0 , G) } pour un élément (B0,G) de $\mathcal{S}^*$.

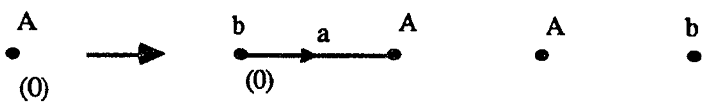
$\mathcal{S}^*$ et un itéré de $\mathcal{T}$ sont des points fixes de $\mathcal{S}$, non équivalents , connexes et non localement finis , plongés mutuellement l'un dans l'autre.

Fig. 4.2 . Système à plusieurs plus petits points fixes connexes et non localement finis .

Soit le système $\mathcal{S}$ = { (A0 , {a01,A1,A2,b0}) } de représentation suivante :



Soit le système $\mathcal{T}$ = { (A0 , {a01,A1,A2,b3,b0}) } de représentation suivante :



Un itéré de $\mathcal{S}$ et un itéré de $\mathcal{T}$ sont des points fixes de $\mathcal{S}$, non équivalents , localement finis et non connexes, et plongés mutuellement l'un dans l'autre .

Fig. 4.3 . Système à plusieurs plus petits points fixes localement finis et non connexes .

Les systèmes à itérés connexes et localement finis admettent pour la relation de plongement un unique (à équivalence près) plus petit point fixe.

Théorème 4.2 . *Pour la relation de plongement, l'ensemble des plus petits points fixes d'un système à itérés connexes et localement finis est l'ensemble des itérés du système .*

Preuve.

Considérons un itéré $\mathcal{S}^*$ connexe et localement fini d'un système $\mathcal{S}$. Soit $\mathcal{T}$ un plus petit point fixe de $\mathcal{S}$ pour $\sqsubseteq$. Par le théorème 4.1 , $\mathcal{T} \sqsubseteq \mathcal{S}^* \sqsubseteq \mathcal{T}$. Considérons les systèmes $\mathcal{U} = \{ (X,G) \in \mathcal{S}^* \mid S_X \cap S_G \neq \emptyset \}$ et $\mathcal{V} = \{ (X,G) \in \mathcal{T} \mid S_X \cap S_G \neq \emptyset \}$. Comme $\mathcal{T} \sqsubseteq \mathcal{S}^*$, $\{ X(1) \mid X \in \mathrm{Dom}(\mathcal{U}) \}$ est égal à $\{ X(1) \mid X \in \mathrm{Dom}(\mathcal{V}) \}$. Par conséquent $\mathcal{V} \sqsubseteq \mathcal{U} \sqsubseteq \mathcal{V}$ et par le b) du lemme 2.4 , $\mathcal{U} \equiv \mathcal{V}$. Comme $\mathcal{S}^*$ est connexe et pour toute règle (X,G) de $\mathcal{S}^*$-$\mathcal{U}$, on a $\{ Y(1) \in I(\mathcal{S}) \mid Y \in G \}$ est inclus dans $\{ Y(1) \mid Y \in \mathrm{Dom}(\mathcal{U}) \}$. De plus $\mathcal{T}$ est un point fixe de $\mathcal{S}$, donc $\mathcal{T}$-$\mathcal{U} \subseteq \rightarrow_{\mathcal{S}} \circ \rightarrow_{\mathcal{T}} \subseteq \rightarrow_{\mathcal{S}} \circ \rightarrow_{\mathcal{V}}$. Par le b) du lemme 3.1 et le b) du lemme 3.2 , on en déduit que $\mathcal{T}$-$\mathcal{U} \subseteq \rightarrow_{\mathcal{S}^*}$. En définitive $\mathcal{T} \subseteq \rightarrow_{\mathcal{S}^*}$ et $I(\mathcal{T}) = I(\mathcal{S}) = I(\mathcal{S}^*)$ d'où $\mathcal{T} \equiv \mathcal{S}^*$. ♦

Pour établir l'analogue du théorème 4.2 pour la relation de plongement faible, on étudie les systèmes sous forme standard (ou sous forme de Greibach), c'est à dire les systèmes tels que pour toute règle, l'entrée est disjointe des sorties.

Définitions. Un système $\mathcal{S}$ est *sous forme standard* si

$$\forall\, (X,G) \in \mathcal{S} \ , \ S_H \cap S_X = \emptyset \quad \text{avec} \quad H = G \cap I(\mathcal{S})(S) \ .$$

Un système $\mathcal{S}$ est *standardisable* s'il existe un entier n non nul et un système $\mathcal{U}$ sous forme standard tel que

$$I(\mathcal{U}) = I(\mathcal{S}) \quad \text{et} \quad \mathcal{U} \subseteq (\rightarrow_{\mathcal{S}})^n \ .$$

Tout système localement fini et standardisable est à itérés localement finis. La réciproque n'est pas vraie : le système $\{ (\{As\},\{As,as\}) \}$ est à itérés localement finis (et connexes), et est non standardisable. Cependant, on a le résultat ci-dessous.

Proposition 4.2 . *Tout système à itérés connexes et localement finis est transformable en un système standardisable de même ensemble d'itérés .*

Preuve.

Soit un itéré $\mathcal{S}^*$ connexe et localement fini d'un système $\mathcal{S}$ tel que $\mathrm{Dom}(\mathcal{S}^*) = \mathrm{Dom}(\mathcal{S})$. On pose

$$I = \{ X \mid X\, \mathcal{S}^*\, G \text{ et } \#S_G < \infty \}$$

et $$\mathcal{U} = \{ (X,G) \in \mathcal{S}^* \mid X \in I \} \cup \{ (X,G) \in \mathcal{S} \mid X \notin I \}.$$

On vérifiera que $\mathcal{S}^*$ est un itéré de $\mathcal{U}$ et que $\mathcal{U}$ est standardisable. ♦

La proposition 4.2 n'est plus valable si les itérés ne sont pas connexes : le système $\{(\{As\},\{As,as,bxy\})\}$ est à itérés localement finis et non connexes, et n'admet pas de système standardisable de même ensemble d'itérés. Les points fixes connexes d'un système $\mathcal{S}$ standardisable sont les itérés connexes de $\mathcal{S}$.

Proposition 4.3 . *Tout point fixe connexe d'un système $\mathcal{S}$ standardisable est un itéré de $\mathcal{S}$.*

Preuve.

Considérons un point fixe $\mathcal{T}$ connexe d'un système $\mathcal{S}$ standardisable. On a $I(\mathcal{T}) = I(\mathcal{S})$ et $\mathcal{T} \subseteq \rightarrow_{\mathcal{S}} \circ \rightarrow_{\mathcal{T}}$. Aussi $\rightarrow_{\mathcal{T}} \subseteq \rightarrow_{\mathcal{S}} \circ \rightarrow_{\mathcal{T}}$. Par récurrence sur n , on déduit que

$$\forall (X,G) \in \mathcal{T} ,\ \exists (N_{X,n})_n \ :\ N_{X,0} = X \ ,\ N_{X,n} \rightarrow_{\mathcal{S}} N_{X,n+1} \ ,\ N_{X,n} \rightarrow_{\mathcal{T}} G \ .$$

Pour tout X de $\mathrm{Dom}(\mathcal{T})$, on pose $N_X = \bigcup_n (N_{X,n} - I(\mathcal{S})(S))$. Aussi le système $\mathcal{U} = \{ (X,N_X) \mid X \in \mathrm{Dom}(\mathcal{T}) \}$ est un itéré de $\mathcal{S}$ et pour tout (X,G) de $\mathcal{T}$, on a $N_X \subseteq G$. Montrons que tout hyperarc Y de G est un hyperarc de N_X . Par connexité de G , considérons l'entier $$p = 1 + \max\{ d_G(s,t) \mid s \in S_Y ,\, t \in S_X \}.$$
Comme $\mathcal{S}$ est standardisable, il existe un entier q et un système $\mathcal{V}$ sous forme standard tels que $I(\mathcal{V}) = I(\mathcal{S})$ et $\mathcal{V} \subseteq (\rightarrow_{\mathcal{S}})^q$. Posons $r = pq$. Comme $N_{X,r} \rightarrow_{\mathcal{T}} G$ et G est connexe, on a $Y \in N_{X,r}$, donc $Y \notin I(\mathcal{S})(S)$. Ainsi $Y \in N_X$. Par conséquent et pour tout (X,G) de $\mathcal{T}$, N_X est égal à G , i.e. $\mathcal{T} \equiv \mathcal{U}$. ♦

La proposition 4.3 ne s'étend pas à tout système à itérés connexes et localement finis : les points fixes connexes du système $\{(As,\{As,as\})\}$ est l'ensemble des systèmes $\{ (Ax,G) \mid ax \in G$ et G est connexe $\}$. Maintenant, on peut établir l'analogue du théorème 4.2 à la relation de plongement faible : les systèmes à itérés connexes et localement finis admettent pour la relation de plongement faible un unique (à isomorphisme près) plus petit point fixe connexe.

Théorème 4.3 . *Pour la relation de plongement faible, l'ensemble des plus petits points fixes connexes d'un système à itérés connexes et localement finis est l'ensemble des itérés du système .*

Preuve.

Considérons un itéré $\mathcal{S}^*$ connexe et localement fini d'un système $\mathcal{S}$ tel que $\mathrm{Dom}(\mathcal{S}^*) = \mathrm{Dom}(\mathcal{S})$. Soit $\mathcal{T}$ un plus petit point fixe connexe de $\mathcal{S}$ pour $\leq$ avec $\mathrm{Dom}(\mathcal{T}) = \mathrm{Dom}(\mathcal{S})$. Reprenons le système $\mathcal{U}$ de la preuve de la proposition 4.2 :

$$I = \{\, X \mid X\, \mathcal{S}^*\, G \text{ et } \#S_G < \infty \,\}$$

et
$$\mathcal{U} = \{\, (X,G) \in \mathcal{S}^* \mid X \in I \,\} \cup \{\, (X,G) \in \mathcal{S} \mid X \notin I \,\} .$$

Montrons que $\mathcal{T}$ est un point fixe de $\mathcal{U}$. Comme $\mathcal{S}^* \sqsubseteq \mathcal{T} \leq \mathcal{S}^*$ et d'après le lemme 2.4 a , pour tout X de I , il existe un isomorphisme f tel que $G \leftrightarrow_f H$ avec $X\, \mathcal{S}^*\, G$, $X\, \mathcal{T}\, H$, $f|_{S_G \cap S_X} = id_{S_G \cap S_X}$. Aussi pour tout (X,H) de $\mathcal{T}$ tel que $X \in I$, on a $X \rightarrow_{\mathcal{S}^*} H$, donc $H \cap I(\mathcal{S})(S) = \emptyset$, d'où $(X,H) \in \rightarrow_{\mathcal{S}^*} \circ \rightarrow_{\mathcal{T}}$ et par définition de $\mathcal{U}$, $(X,H) \in \rightarrow_{\mathcal{U}} \circ \rightarrow_{\mathcal{T}}$. De même pour tout (X,H) de $\mathcal{T}$ tel que $X \notin I$ et comme $\mathcal{T}$ est un point fixe de $\mathcal{S}$, on a $(X,H) \in \rightarrow_{\mathcal{S}} \circ \rightarrow_{\mathcal{T}}$ et par définition de $\mathcal{U}$, $(X,H) \in \rightarrow_{\mathcal{U}} \circ \rightarrow_{\mathcal{T}}$. En définitive $\mathcal{T} \subseteq \rightarrow_{\mathcal{U}} \circ \rightarrow_{\mathcal{T}}$, donc $\mathcal{T}$ est un point fixe de $\mathcal{U}$. Par les propositions 4.2 et 4.3 , on en déduit que $\mathcal{T}$ est un itéré de $\mathcal{U}$ et donc de $\mathcal{S}$. ◆

5. Génération uniforme d'hypergraphes à motifs

On établit que tout hypergraphe à motifs connexe et localement fini est engendrable à l'aide d'un système de motifs par distance de un à partir d'un ensemble fini quelconque de sommets.

Pour caractériser la classe des transitions des automates à pile, Muller et Schupp [Mu-Sc 85] ont introduit la classe des graphes finiment décomposables, c'est à dire qui se décomposent en un nombre fini de composantes connexes (à isomorphisme près et respectant les sommets de décomposition) par suppression itérative des sommets dans le sens direct et inverse des arcs, et ce à partir de n'importe quel ensemble fini de sommets. Avant d'en donner une définition formelle, on étend l'isomorphisme des hypergraphes aux paires (G,D) où G est un hypergraphe et D est une partie de S_G : (G,D) est isomorphe à (H,E) et on note $(G,D) \leftrightarrow (H,E)$, s'il existe un isomorphisme f de G sur H tel que $f(D) = E$. On rappelle qu'une composante connexe d'un hypergraphe G est une partie connexe maximale (pour l'inclusion) de G.

Définition. Etant donné un hypergraphe G et une partie D de S_G, la paire (G,D) se décompose immédiatement en (H,E) et on note $(G,D) \Rightarrow (H,E)$, si

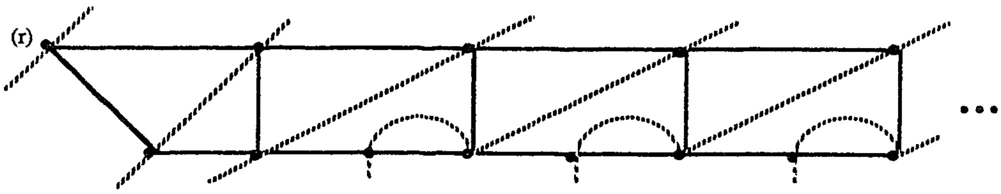
H est une composante connexe de $G|_{S_G\text{-}D}$

$E = (Succ_G \cup (Succ_G)^{-1})(D) \cap S_H$.

Un hypergraphe G connexe et localement fini *a une décomposition finie* [resp. *est de décomposition finie*] si $\mathfrak{D}(G,D) = \{\leftrightarrow(H,E) \mid (G,D) (\Rightarrow)^* (H,E)\}$ est fini pour une [resp. pour toute] partie D finie et non vide de S_G.

La notion de décomposition finie n'est définie que pour les hypergraphes connexes et localement finis de sorte que la décomposition porte sur tout l'hypergraphe et que tout ensemble de sommets atteints par décomposition reste fini.

Soit un graphe G de représentation (les flèches et les étiquettes des arcs ne sont pas indiquées) suivante :



L'ensemble $D(G,\{r\})$ est de cardinalité 4 .

Fig. 5.1 . Un graphe ayant une décomposition finie .

A toute décomposition finie d'un hypergraphe, on peut associer biunivoquement un système de motifs, dit uniforme, qui l'engendre.

Définition. Un système $\mathbf{S}$ est *uniforme* si pour tout (X,G) de $\mathbf{S}$ et pour $H = G \cap I(\mathbf{S})(S)$, les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\forall\, Y \in G \cap (F\text{-}I(\mathbf{S}))(S)\ ,\ S_X \cap S_Y \neq \emptyset$

(ii) $S_X \cap S_H = \emptyset$

(iii) $\forall\, Y,Z \in H\ ,\ S_Y \cap S_Z = \emptyset$ si $Y \neq Z$.

Un hypergraphe G est *engendrable uniformément* à partir d'une partie finie D de S_G s'il existe un itéré $\mathbf{S}^*$ d'un système de motifs uniforme tel que $(X,G) \in \mathbf{S}^*$ et $S_X = D$.

Aussi un système est uniforme si pour tout hypergraphe membre droit d'une règle, tout hyperarc étiqueté par un symbole terminal possède au moins un sommet d'entrée (i), l'entrée est disjointe des sorties (ii), deux sorties sont disjointes (iii). Comme un système uniforme est sous forme standard, tout hypergraphe engendrable uniformément est localement fini. Montrons que les propriétés des hypergraphes d'avoir une décomposition finie et d'être engendrable uniformément sont identiques.

Proposition 5.1 . *Pour tout hypergraphe G connexe et localement fini et pour toute partie D finie et non vide de S_G , G a une décomposition finie à partir de D si et seulement si G est engendrable uniformément à partir de D .*

Preuve.

a) Soient un hypergraphe G connexe et localement fini et une partie D finie de S_G tels que $\mathcal{D}(G,D)$ soit fini. Montrons que G est engendrable uniformément à partir de D. On note $\{\leftrightarrow(H_1,E_1),\ldots,\leftrightarrow(H_p,E_p)\} = \mathcal{D}(G,D)$ avec $(H_1,E_1) = (G,D)$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Pour tout i de $\{1,\ldots,p\}$, on note $H_{i,1},\ldots,H_{i,q_i}$ les q_i composantes connexes de $H_i|_{S_{H_i}-E_i}$. Comme (H_i,E_i) se décompose en $(H_{i,j},E_{i,j})$ avec $E_{i,j} = (Succ_{H_i} \cup (Succ_{H_i})^{-1})(E_i) \cap S_{H_{i,j}}$, il existe un entier $m_{i,j}$ de $\{1,\ldots,p\}$ et un isomorphisme $h_{i,j}$ de $H_{i,j}$ sur $H_{m_{i,j}}$ tel que $h_{i,j}(E_{i,j}) = E_{m_{i,j}}$. On choisit p symboles $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$ dans $F - \{f \mid \{f\}(S) \cap G \neq \emptyset\}$ et tel que l'arité de φ_i soit égale à $\#E_i$. Pour tout i de $\{1,\ldots,p\}$, on définit l'hypergraphe $G_i = \{\varphi_i s_{i,1}\ldots s_{i,\#E_i}\}$ avec $\{s_{i,1},\ldots,s_{i,\#E_i}\} = E_i$ et on définit l'hypergraphe $K_i = \{ X \in H_i \mid S_X \cap E_i \neq \emptyset \}$. Ce qui est décomposé est alors généré par le système de motifs suivant :

$$\mathcal{S} = \{ (G_i , K_i \cup \bigcup\{(h_{i,j})^{-1}(G_{m_{i,j}}) \mid 1 \leq j \leq q_i\}) \mid 1 \leq i \leq p \} .$$

On vérifie que $\mathcal{S}$ est uniforme et qu'il existe un itéré $\mathcal{S}^*$ de $\mathcal{S}$ tel que $Dom(\mathcal{S}^*) = Dom(\mathcal{S})$ et tel que $G_1 \mathcal{S}^* G$.

b) Considérons un itéré $\mathcal{S}^*$ connexe et localement fini d'un système de motifs $\mathcal{S}$ uniforme. Pour toute paire (X,G) de $\mathcal{S}^*$, on a

$$\mathcal{D}(G,S_X) \subseteq \{\leftrightarrow(H,S_Y) \mid Y \mathcal{S}^* H \} .$$

Aussi tout hypergraphe connexe, localement fini, et engendrable uniformément à partir de D, a une décomposition finie à partir de D. ♦

Tout hypergraphe à motifs connexe et localement fini est membre droit d'un itéré d'un système uniforme, et ce indépendamment de l'entrée.

Théorème 5.1 . *Tout hypergraphe à motifs connexe et localement fini est engendrable uniformément à partir de n'importe quel ensemble fini de ses sommets.*

Preuve.

Soit un hypergraphe à motifs G connexe et localement fini et soit une partie D finie de S_G. On désire montrer que G est engendrable uniformément à partir de D. Par la proposition 5.1 , il revient au même d'établir que la décomposition de G à partir de D est finie. Par définition d'un hypergraphe à motifs, il existe un itéré $\mathbb{S}^* = \{ (G_i,K_i) \mid 1\leq i\leq p \}$ d'un système de motifs $\mathbb{S} = \{ (G_i,H_i) \mid 1\leq i\leq p \}$ tels que $G = K_1$ et $H_i - I(\mathbb{S})(S) \subseteq K_i$. On va établir que la décomposition de G à partir de D est finie parce qu'elle s'obtient à partir des K_i par suppression de sommets à une distance bornée des sommets des G_i.

On peut supposer que $D \subseteq S_{H_1}$. En effet, il existe une suite d'hypergraphes $(N_n)_n$ telle que $G = \bigcup_n (N_n\text{-}I(\mathbb{S})(S))$, $N_0 = G_1$ et $N_n \rightarrow_{\mathbb{S}} N_{n+1}$. Comme D est fini, il existe n tel que $D \subseteq S_{N_n}$ et il suffit alors de remplacer H_1 par N_n dans $\mathbb{S}$. De plus, on peut supposer que $\mathbb{S}$ est réduit, c'est à dire que pour tout i de $\{1,\ldots,p\}$, l'étiquette inconnue $X_i(1)$ pour $\{X_i\} = G_i$ est nécessaire au développement de G, i.e. il existe n tel que $\{X_i(1)\}(S) \cap N_n \neq \emptyset$.

Par connexité de G et par réduction de $\mathbb{S}$, l'ensemble des composantes connexes de K_i est fini et est noté $\{K_{i,1},\ldots,K_{i,q_i}\}$. On pose $m = \max\{ d_{K_{i,j}}(s,t) \mid s,t \in S_{H_i} \cap S_{K_{i,j}}, 1\leq i\leq p, 1\leq j\leq q_i \}$ et on définit l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} = \{ \leftrightarrow(H,E) \mid\ & \exists\, i \in \{1,\ldots,p\}, \exists\, j \in \{1,\ldots,q_i\}, \exists\, U \subseteq S_{K_{i,j}} \\ & (\forall s \in U, \exists\, t \in S_{H_i} \cap S_{K_{i,j}} : d_{K_{i,j}}(s,t) < m \\ & \quad H \text{ est une composante connexe de } K_{i,j}|_{S_{K_{i,j}}\text{-}U} \\ & \quad E = (Succ_{K_{i,j}} \cup (Succ_{K_{i,j}})^{-1})(U) \cap S_H \quad) \}. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathbb{C}$ est fini et on va établir que $\mathbb{D}(G,D)$ est une partie de $\mathbb{C}$.

Soit (H,E) obtenu par décomposition de (G,D), i.e. $(G,D)\ (\Rightarrow)^*\ (H,E)$. Par connexité de H, ils existent i de $\{1,\ldots,p\}$, j de $\{1,\ldots,q_i\}$ et un hypergraphe K tels que $H \subseteq K \leftrightarrow_f K_{i,j}$ et tel qu'il existe un sommet s de H pour lequel $f(s) \in H_i$. Soit $t \in E$. Comme G est connexe, il existe un chemin de longueur minimale de D à t, i.e. $\exists\, s_0 \in D : d_G(s_0,t) = \min\{ d_G(s',t) \mid s' \in D \}$. Ce chemin passe par un sommet u de K tel que $f(u) \in H_i$. Comme la décomposition de (G,D) en (H,E) n'a pas encore supprimé s, on a

$$d_{K_{i,j}}(f(u),f(t)) \leq d_{K_{i,j}}(f(u),f(s)) \leq m.$$

D'où $\leftrightarrow(H,E) \in \mathbb{C}$. En définitive $\mathbb{D}(G,D)$ est fini.

◆

De la proposition 5.1 et du théorème 5.1, on déduit le corollaire 2.7 de [Mu-Sc 85], à savoir tout hypergraphe ayant une décomposition finie est de décomposition finie. Autrement dit, la finitude de la décomposition est indépendante du choix des sommets de départ de la décomposition. De plus, on déduit que la classe des hypergraphes à décomposition finie est la classe des hypergraphes à motifs (connexes et localement finis).

Corollaire 5.1 . *Soit un hypergraphe* G *connexe et localement fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est un hypergraphe à motifs*

(ii) G *est de décomposition finie*

(iii) G *a une décomposition finie.*

Le corollaire 5.1 permet de tester si un hypergraphe connexe et localement fini est ou non à motifs. La figure 5.2 donne des exemples de graphes qui ne sont pas à motifs.

Indépendamment de l' orientation et de l'étiquetage des arcs , les graphes de représentation ci-dessous ne sont pas à motifs .

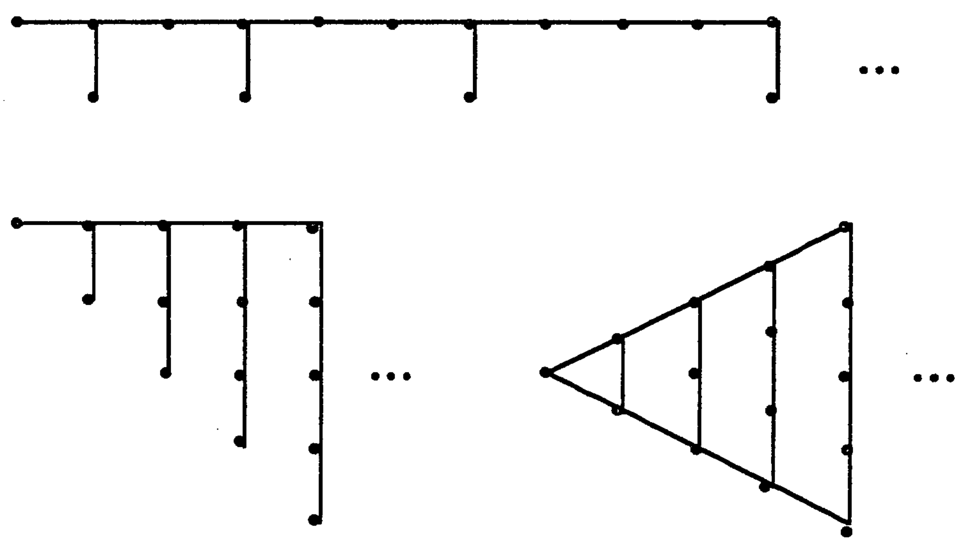


Fig. 5.2 . Graphes qui ne sont pas à motifs .

6. Graphes des récritures suffixes de mots

Afin de caractériser les graphes à motifs sur F à une racine et localement finis, on définit la classe des graphes des systèmes de récritures suffixes de mots à règles étiquetées par F. Cette classe est une généralisation de la classe des graphes des transitions des automates à pile et contient strictement la classe des graphes des transitions gauches (ou droites) des grammaires algébriques.

Etant donné un alphabet X et un ensemble E quelconque, un système de récriture sur (X,E) est un système de récriture de mots sur X, à règles étiquetées par E.

Définition. Soient X un alphabet et E un ensemble.

Un *système de récriture* R sur (X,E) est une partie finie de X^*xExX^*.

Le système R est dit *normalisé* si $\forall$ (u,f,v) $\in$ R, $|u| \leq 2$.

Le système R est dit *unitaire* si $\forall$ (u,f,v) $\in$ R, $|u| = 1$.

Pour toute relation R binaire sur X^*, on pose

$\xrightarrow[R]{} = \{ (ux,uy) \mid u \in X^* \wedge x\,R\,y \}$ un pas de récriture suffixe selon R

$\xrightarrow[R]{*} = (\xrightarrow[R]{})^{(*)}$ la récriture suffixe selon R, c'est-à-dire le plus petit préordre contenant R et compatible à gauche.

Exemple : Soient X = {a,b,c} et R = { (bbc,bc), (abc,ca), (a,ba) }.

On a $\xrightarrow[R]{*}(ab^nc) = \{ ab^ic \mid 1 \leq i \leq n \} \cup cb^*a$.

Dorénavant, on suppose que tout système de réciture sur (X,F) est tel que pour toute règle (u,f,v) de R, l'arité de f est 2. Le graphe des récritures suffixes d'un système R sur (X,F) à partir d'un mot u_0 de X^* est le graphe G sur $F(X^*)$ tel que u est un sommet de G si et seulement si u s'obtient à partir de u_0 par récriture suffixe selon $\langle R \rangle = \{ (u,v) \mid \exists f, (u,f,v) \in R \}$ et tel que fuv est un arc de G si et seulement si u se récrit en v en un pas de récriture suffixe selon une règle de R étiquetée par f.

Définition. Un graphe G sur F est un *graphe des récritures suffixes* s'il existe un alphabet X, un système de récriture R sur (X,F), et un mot u_0 de X^* tels que G soit isomorphe à

$$D(R,u_0) = \{ fuv \mid u_0 \xrightarrow[<R>]{*} u \ , \ u = u'u'' \ , \ v = u'v'' \ , \ (u'',f,v'') \in R \} .$$

Considérons le système R normalisé sur ({A,p,q} , {a,b,c,d}) suivant :

$$R = \{ (p,a,q) , (p,b,Ap) , (Ap,c,p) , (Aq,d,q) \} .$$

Le graphe D(R,p) admet la représentation suivante :

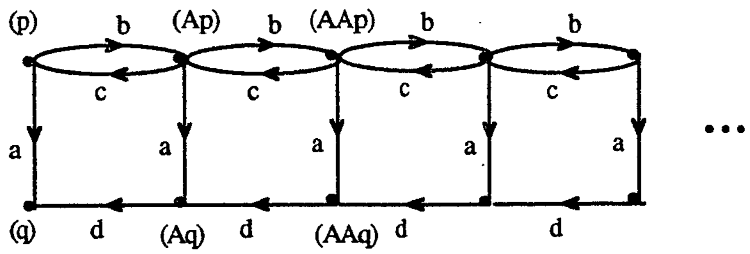


Fig 6.1 . Graphe des récritures suffixes d'un système.

Considérons un automate à pile $\mathcal{A} = (P,Q,\delta,q_0)$ où P est l'alphabet de pile, Q est l'alphabet des états, δ est la relation de transition, c'est à dire une partie finie de $(P \cup \{\varepsilon\}).Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times P^*.Q$, et $q_0 \in Q$ l'état initial. Le graphe des transitions [Mu-Sc 85] de $\mathcal{A}$ est le graphe des récritures suffixes $D(\delta,q_0)$ sur $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$. Ceci nous amène à définir un graphe algébrique sur F comme étant un graphe des récritures suffixes d'un système normalisé à règles étiquetées par F .

Définition. Un graphe G sur F est un *graphe algébrique* [resp. est un *graphe des transitions d'une grammaire algébrique*] si G est un graphe des récritures suffixes d'un système normalisé [resp. unitaire] .

Bien que les grammaires algébriques et les automates à pile engendrent (ou reconnaissent) la même classe de langages, il existe des graphes algébriques qui ne sont pas des graphes des transitions des grammaires algébriques.

Proposition 6.1 . *L'ensemble des graphes des transitions des grammaires algébriques est une sous-classe propre de l'ensemble des graphes algébriques.*

Preuve.

Prenons le système R défini à la figure 6.1 et supposons qu'il existe un alphabet Y , un système S sur (Y,F) unitaire et un mot u_0 de Y^* tel que $D(R,p) \leftrightarrow_f D(S,u_0)$. Il existe un entier m tel que $|f(A^{m+1}p)| > |f(A^m p)| \geq |f(q)|$. Posons $v = f(A^m p)$ et $w = f(A^{m+1}p)$. Comme S est unitaire, que $|w| > |v|$ et $cwv \in D(S,u_0)$, il existe $B \in Y$ tel que $w = vB$. Comme S est unitaire et $awf(A^{m+1}q) \in D(S,u_0)$, il existe $\alpha \in Y^*$ tel que $f(A^{m+1}q) = v\alpha$. Comme il existe un unique chemin de $D(S,u_0)$ allant de $f(A^{m+1}q)$ à $f(q)$, que $|v| \geq |f(q)|$ et S est unitaire, il existe un entier n avec $0 \leq n \leq m+1$ tel que $f(A^n q) = v$. Ainsi $f(A^m p) = f(A^n q)$ est contradictoire. ♦

Ainsi des propriétés satisfaites par la classe des graphes des transitions des grammaires algébriques ne sont plus vérifiées par la classe des graphes des transitions des automates à pile (à ce propos, la conclusion de [Ba-Be-Kl 87] sur une nouvelle preuve de l'équivalence des automates à pile temps-réel et déterministe, est erronée).

Cependant on va établir que l'ensemble des graphes des récritures suffixes est la classe des graphes algébriques, et un tel résultat ne s'obtient pas par un codage des mots des règles. A ce propos, le lemme 2.4 de [Mu-Sc 85] est faux ; par exemple, le système $S = \{ (A,a,\varepsilon) , (A,b,AB) , (B,a,A) , (B,b,B^2) \}$ est une mise sous forme normalisée du système $R = \{ (A,a,\varepsilon) , (A,b,A^3) \}$, et D(S,A) n'est pas isomorphe à D(R,A) .

7. Théorème principal

On caractérise la classe des graphes à motifs sur F à une racine et localement finis comme étant celle des graphes des récritures suffixes à règles étiquetées sur F , ou bien celle des graphes algébriques sur F . De plus, à partir de tout système R de récriture et d'un mot u_0 (et en particulier à partir de tout automate à pile), on peut extraire de façon effective un système de motifs du graphe $D(R,u_0)$ des récritures suffixes de R à partir de u_0 . Ce résultat est donc la version effective du théorème 2.6 de Muller et Schupp [Mu-Sc 85].

Théorème 7.1 . *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) G est un graphe à motifs à une racine et localement fini

(ii) G est un graphe des récritures suffixes

(iii) G est un graphe algébrique .

De plus, le passage de (ii) à (i) est effectif.

Preuve.

(iii) ⇒ (ii) : Par définitions .

(i) ⇒ (iii) : Soit un graphe G à motifs, à une racine r et localement fini. Par le corollaire 5.1 , G est de décomposition finie, donc finiment décomposable à partir de la racine r . On note $\{\leftrightarrow(H_1,E_1),\ldots,\leftrightarrow(H_p,E_p)\} = \mathfrak{D}(G,\{r\})$ avec $(H_1,E_1) = (G,\{r\})$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$. A partir de cette décomposition finie de G , on construit un automate à pile dont le graphe des transitions est G . Les états de l'automate sont les éléments des E_i . Le passage de la i ieme composante à la j ieme sous-composante se fait par empilement de (i,j) , et le passage inverse par dépilement de (i,j) . Comme pour le a) de la preuve de la proposition 5.1 et pour tout i de $\{1,\ldots,p\}$, on note $H_{i,1},\ldots,H_{i,q_i}$ les q_i composantes connexes de $H_i|_{S_{H_i}-E_i}$. Comme (H_i,E_i) se décompose en $(H_{i,j},E_{i,j})$ avec $E_{i,j} = (Succ_{H_i} \cup (Succ_{H_i})^{-1})(E_i) \cap S_{H_{i,j}}$, il existe un entier $m_{i,j}$ de $\{1,\ldots,p\}$ et un isomorphisme $h_{i,j}$ de $H_{i,j}$ sur $H_{m_{i,j}}$ tels que $h_{i,j}(E_{i,j}) = E_{m_{i,j}}$. On pose

$$X = \{ (i,j) \mid 1 \leq i \leq p \wedge 1 \leq j \leq q_i \} \cup \bigcup \{ E_i \mid 1 \leq i \leq p \}$$

et en considérant que X est un alphabet, on définit le système de récriture normalisé R sur (X,F) suivant :

$$R = \{ (s,f,t) \mid fst \in H_i \ , \ s,t \in E_i \ , \ 1 \leq i \leq p \}$$
$$\cup \ \{ (s,f,(i,j)h_{i,j}(t)) \mid fst \in H_i \ , \ s \in E_i \ , \ t \in E_{i,j} \ , \ 1 \leq i \leq p \ , \ 1 \leq j \leq q_i \}$$
$$\cup \ \{ ((i,j)h_{i,j}(t),f,s) \mid fts \in H_i \ , \ s \in E_i \ , \ t \in E_{i,j} \ , \ 1 \leq i \leq p \ , \ 1 \leq j \leq q_i \} .$$

On vérifie que G est isomorphe à $D(R,r)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Considérons un système de récriture R sur (X,F) et un mot r de X^*. Le graphe $G = D(R,r)$ a pour racine r et est localement fini. Montrons que G est un graphe à motifs sur F en décomposant G par sommets de longueurs croissantes.

On pose $K = \max\{ |u| \mid u \in Dom(\langle R \rangle) \}$ et pour toute partie E de X^*, on note $D(E) = \bigcup\{ D(R,u) \mid u \in E \}$. A tout graphe $H \subseteq F(X^*)$ et à tout sommet u de H, on note H_u la composante connexe de $H|_{\{ v \mid |v| \geq |u| \}}$ et contenant u. A tout sommet u de G, on définit

$I_u = (\{r\} \cup Succ_G(\{v \mid |v| < |u| \})) \cap S_{G_u}$

p_u le préfixe de u de longueur $\max(0,|u|-K)$

s_u le suffixe de u de longueur $\min(|u|,K)$, i.e. $p_u s_u = u$

et on va établir en a) que G_u est la composante connexe de $D(I_u)$ restreinte aux sommets de longueur $\geq |u|$ et contenant u, et en b) que p_u est un préfixe commun aux sommets de G_u.

a) Montrons $\forall \ u \in S_G$, $u \in S_{D(I_u)}$ et $D(I_u)_u = G_u$.

Soit $s \in S_{G_u}$ donc $r \xrightarrow[\langle R \rangle]{*} s$ et $|s| \geq |u|$.

Aussi il existe une suite $(u_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $u_0 = r$, $u_i \xrightarrow[\langle R \rangle]{} u_{i+1}$, $u_n = s$.

On pose $m = \max(\{0\} \cup \{i \mid |u_i| < |u| \}) + 1$. Donc $m \leq n$ et $u_m \in I_u$, d'où $s \in S_{D(I_u)}$.

Ainsi $S_{G_u} \subseteq S_{D(I_u)}$ et en particulier $u \in S_{D(I_u)}$. Par conséquent $D(I_u)_u$ existe et $G_u \subseteq D(I_u)_u$.

De plus $I_u \subseteq S_{G_u}$, d'où $D(I_u)_u \subseteq G_u$ et le a) est établi.

Etant donnés un mot u sur X, une partie I de X^* et un graphe G de $F(X^*)$, on note

$$u^{-1}I = \{v \mid uv \in I \} \quad \text{et} \quad uG = \{ f(ux)(uy) \mid fxy \in G \} .$$

b) Montrons $\forall \ u \in S_G$, $D(I_u)_u = p_u.D((p_u)^{-1}I_u)_{s_u}$.

Comme u est sommet de $D(I_u)_u$, il suffit d'établir que tous les sommets de $D(I_u)_u$ ont un même préfixe commun de longueur $\max(0,|u|-K)$ et, par définition de K, on est assuré que ce préfixe n'intervient pas dans une récriture suffixe. Par définition de $D(I_u)_u$, il suffit d'établir que tous les éléments de I_u ont un même préfixe commun de longueur $\max(0,|u|-K)$. On pose $H = D(I_u)_u$ et on considère la relation $\downarrow_H$ binaire sur I_u définie par

$$v \downarrow_H w \quad \text{ssi} \quad (Succ_H)^*(v) \cap (Succ_H)^*(w) \neq \emptyset .$$

Comme les sommets de H sont de longueur supérieure ou égale à $|u|$, si $v \downarrow_H w$ alors v et w ont un même préfixe de longueur $\max(0,|u|-K)$. Il nous reste alors à établir la propriété (1) suivante :

(1) $\quad \forall P \ (P \subseteq I_u \wedge \emptyset \neq P \neq I_u), \ \exists v \in I_u\text{-}P \ , \ \exists w \in P : v \downarrow_H w$

Considérons une partie P propre de I_u et posons $K = H|_{(Succ_H)^*(P)}$. On a les deux cas suivants :

Cas 1 : $S_K \cap (I_u\text{-}P) \neq \emptyset$ donc $\exists v \in I_u\text{-}P : v \in S_K$.

Ainsi $\exists w \in P : v \in (Succ_H)^*(w)$, d'où $v \downarrow_H w$.

Cas 2 : $S_K \cap (I_u\text{-}P) = \emptyset$. Comme $H = D(I_u)_u$ est connexe, $\exists v \in I_u\text{-}P$ tel que $(Succ_H)^*(v) \cap S_K \neq \emptyset$. Ainsi $\exists w \in P : (Succ_H)^*(w) \cap (Succ_H)^*(v) \neq \emptyset$, d'où $v \downarrow_H w$.

Dans les deux cas, (1) est établi et le b) par la même occasion.

c) La décomposition est effectuée par sommets de longueurs croissantes, donc ne tenant pas compte de l'orientation des arcs. Pour cela et pour tout sommet u de G, on définit l'ensemble J_u des sommets de G_u suivant :

$$J_u = (\{r\} \cup (Succ_G \cup (Succ_G)^{-1})(\{v \mid |v| < |u|\})) \cap S_{G_u} .$$

L'ensemble $J_u - \{r\}$ est l'ensemble de sommets de G_u reliés par une arête dans G à un sommet de longueur $< |u|$. Aussi $I_u \subseteq J_u \subseteq S_{G_u}$, donc $D(I_u)_u \subseteq D(J_u)_u \subseteq G_u = D(I_u)_u$, d'où $D(I_u)_u = D(J_u)_u$. De plus $J_u \subseteq S_{G_u} = p_u.S_{D((p_u)^{-1}I_u)_{s_u}}$, donc $(p_u)^{-1}.J_u \subseteq S_{D((p_u)^{-1}I_u)_{s_u}}$. Par conséquent $D((p_u)^{-1}J_u)_{s_u} \subseteq D((p_u)^{-1}I_u)_{s_u}$ et comme $I_u \subseteq J_u$, on en déduit que $D((p_u)^{-1}I_u)_{s_u} = D((p_u)^{-1}J_u)_{s_u}$

En définitive et pour tout sommet u de G, on a l'égalité (2) suivante :

(2) $$G_u = p_u.D((p_u)^{-1}J_u)_{s_u} .$$

d) Extraction des motifs de G.

A isomorphisme près, on associe un motif par composante G_u d'entrée J_u. D'après (2), le couple $(J_u,|u|)$ définit entièrement G_u. Aussi, on considère la relation $\sim$ binaire sur S_G définie comme suit :

$$u \sim v \quad \text{ssi} \quad (\,(p_u)^{-1}.J_u = (p_v)^{-1}.J_v\,) \wedge (\,|s_u| = |s_v|\,)\,.$$

Par conséquent, si $u \sim v$ alors il existe un isomorphisme de G_u sur G_v respectant les entrées. La relation $\sim$ est une équivalence d'indice fini. On note $\{\sim(u_1),\ldots,\sim(u_p)\}$ l'ensemble des p classes d'équivalence de S_G pour $\sim$ avec $u_1 = r$. On choisit p symboles $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$ de F, distincts des étiquettes de R (i.e. pour $\Phi = \{\varphi_1,\ldots,\varphi_p\}$, $\#\Phi = p$ et $\Phi \cap \{\, f \mid (u,f,v) \in R\,\} = \emptyset$) et tels que pour $1 \leq i \leq p$, $\rho(\varphi_i) = \#J_{u_i}$. Pour tout i de $\{1,\ldots,p\}$, on note

$\{t_{i,1},\ldots,t_{i,r_i}\}$ les $r_i = \rho(\varphi_i)$ éléments de J_{u_i},

$E_i = \{\, u \mid u \in S_{G_{u_i}} \wedge |u| = |u_i|\,\}$,

$H_{i,1}, \ldots, H_{i,q_i}$ les q_i composantes connexes de $G_{u_i}|_{S_{G_{u_i}}-E_i}$.

Pour tout i de $\{1,\ldots,p\}$ et pour tout j de $\{1,\ldots,q_i\}$, on considère un sommet $v_{i,j}$ de $H_{i,j}$. Il existe $m_{i,j} \in \{1,\ldots,p\}$ tel que $v_{i,j} \sim u_{m_{i,j}}$. On définit le système

$$\mathcal{S} = \{\, (\varphi_i t_{i,1}\ldots t_{i,r_i}, H_i) \mid 1 \leq i \leq p \,\} \quad \text{avec}$$

$$H_i = \{\, fuv \in G_{u_i} \mid \{u,v\} \cap E_i \neq \emptyset \,\}$$
$$\cup \{\, \varphi_{m_{i,j}}(p_{v_{i,j}}(p_{u_{m_{i,j}}})^{-1} t_{m_{i,j},1})\ldots(p_{v_{i,j}}(p_{u_{m_{i,j}}})^{-1} t_{m_{i,j},r_{m_{i,j}}}) \mid 1 \leq j \leq q_i \,\}\,.$$

A partir de l'égalité (2), on vérifie que G est un itéré de $\mathcal{S}$ à partir de G_1, ce qui termine d) et la preuve de (ii) $\Rightarrow$ (i).

Passage effectif de (ii) à (i) : On rappelle [Ca 88 a] que $\xrightarrow[\langle R\rangle]{*}$ est une relation rationnelle dont un transducteur est effectivement constructible à partir de <R>. En particulier, pour toute partie I finie de S_G, $\xrightarrow[\langle R\rangle]{*}(I)$ est un langage rationnel sur X dont un automate fini est effectivement constructible à partir de <R> et de I.

Pour rendre effectif le passage de (ii) à (i), il suffit à partir de tout couple $(|u|,(p_u)^{-1}J_u)$ associé à G_u de déterminer les couples associés aux composantes connexes de G_u restreinte à $S_{G_u}-E_u$.

Pour tout graphe $H \subseteq F(X^*)$ et pour tout entier n, on note $H_n = H|_{\{u \,\mid\, |u| \geq n\}}$. A partir d'un entier m et d'un ensemble I fini de sommets de G tel que $D(I)_m$ soit connexe et tels que $\min\{|v| \mid v \in I\}$ soit égal à m, on peut déterminer

$E_{(m,I)} \;=\; \{\, u \mid |u| = m \text{ et } u \in \xrightarrow[<R>]{*}(I) \,\}$,

le préfixe $p_{(m,I)}$ commun aux éléments de $E_{(m,I)}$ et de longueur $\max(0,m-K)$,

$J \;=\; (p_{(m,I)})^{-1}\,(\,(\,I \cup (\xrightarrow[<R>]{} \cup (\xrightarrow[<R>]{})^{-1}\,)\,(E_{(m,I)})\,)\, \cap \,\{\, u \in S_G \mid |u| > m \,\}\,)$,

la partition $J_1,\ldots,J_q$ de J telle que $D(J_1)_{m-|p_{(m,I)}|+1}\,,\ldots,\,D(J_q)_{m-|p_{(m,I)}|+1}$ sont les q composantes connexes de $D(J)_{m-|p_{(m,I)}|+1}$ (en effet, on sait décider pour deux éléments s et t de J, si $\xrightarrow[<R>]{*}(s) \cap \xrightarrow[<R>]{*}(t)$ est vide) ,

$i(m,K) \;=\; \min\,\{\, |u| \geq m \mid u \in \xrightarrow[<R>]{*}(K) \,\}$ pour toute partie K de S_G ,

et l'ensemble $\Rightarrow(m,I) = \{\, (i(m-|p_{(m,I)}|+1,J_j),J_j) \mid 1 \leq j \leq q \,\}$.

On peut donc calculer l'ensemble fini $D = (\Rightarrow)^*\,(i(0,\{r\}),\{r\})$, associer à chaque (m,I) de D un nouveau symbole $\varphi_{(m,I)}$ de F d'arité $\#I$ et un hyperarc $X_{(m,I)} = \varphi_{(m,I)}s_1\ldots s_{\#I}$ avec $\{s_1,\ldots,s_{\#I}\} = I$. Ensuite, à tout (m,I) de D , on construit l'hypergraphe $G_{(m,I)}$ suivant :

$$\begin{aligned} G_{(m,I)} \;=\; &\{\, fuv \mid (u \in E_{(m,I)} \vee v \in E_{(m,I)}) \wedge |u| \geq m \wedge |v| \geq m \wedge \\ &\qquad \exists\, (u',f,v') \in R\,,\ \exists\, w\,(\,u = wu' \wedge v = wv'\,)\,\} \\ &\cup\ \{\, p_{(m,I)}\,X_{(n,J)} \mid (m,I) \Rightarrow (n,J) \,\}\,. \end{aligned}$$

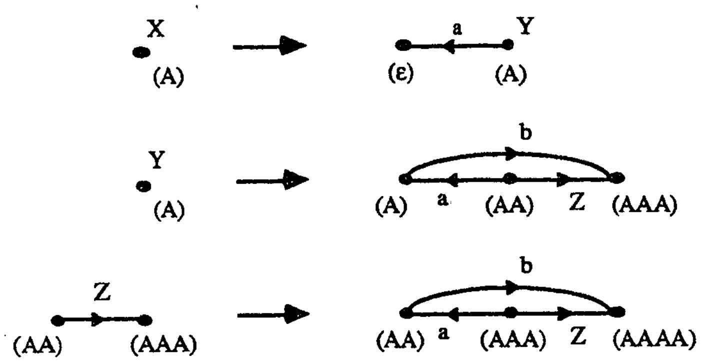
D'après d) , le système recherché est $\mathbf{S} \;=\; \{\, (\{X_{(m,I)}\},G_{(m,I)}) \mid (m,I) \in D \,\}$ et le graphe G est un itéré de $\mathbf{S}$ à partir de $X_{(i(0,\{r\}),\{r\})}$. Le théorème 7.1 est entièrement démontré. ◆

La figure 7.1 illustre la construction du théorème d'un système de motifs à partir d'une grammaire algébrique.

Soit le système de récriture R unitaire sur ({A} , {a,b}) suivant :

$R = \{ (A,a,\varepsilon), (A,b,AAA) \}$.

La construction du théorème 7.1 d'un système de motifs du graphe des récritures de R à partir de A donne le système S de représentation suivante :



Le graphe D(R,A) et les itérés de S à partir de X ont pour représentation :

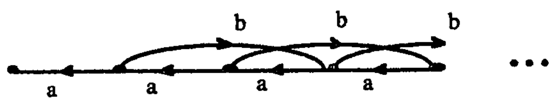


Fig. 7.1 . Système de motifs d'un graphe des récritures suffixes.

Le théorème 2.6 de [Mu-Sc 85] est un corollaire du théorème 7.1 et du corollaire 5.1 .

Corollaire 7.1 . *Un graphe est algébrique si et seulement si il est à une racine, localement fini et de (ou à) décomposition finie.*

8. Les langages à motifs

On considère les graphes à motifs en relation avec les langages formels. On définit un langage à motifs comme l'ensemble des mots étiquetant des chemins d'un graphe à motifs, et on montre que la classe des langages à motifs est celle des langages algébriques.

Pour particulariser des chemins d'un graphe G sur F, on distingue deux symboles d et f de F d'arités un, et on définit le langage de G comme l'ensemble des étiquettes des chemins partant d'un sommet étiqueté par d et arrivant à un sommet étiqueté par f.

Définitions. Soient d et f des éléments de F d'arités 1. Le *langage d'un graphe* G sur F selon (d,f) est défini par

$L(G,d,f) = \{u \in F^* \mid \exists\, s_0,\ldots,s_{|u|}\ (\forall\, i\ (1 \leq i \leq |u| \wedge u(i)s_{i-1}s_i \in G) \wedge ds_0, fs_{|u|} \in G)\}$.

Un langage L sur un alphabet X est un *langage à motifs* s'il existe un graphe à motifs G sur $X \cup \{d,f\}$ tel que $L = L(G,d,f)$ et toute lettre de X est d'arité 2.

Montrons qu'un langage est à motifs si et seulement si il est algébrique.

Théorème 8.1 . *La classe des langages à motifs est égale à la classe des langages algébriques.*

Preuve.

$\Leftarrow$: Soit L un langage algébrique sur un alphabet X. Il existe une grammaire algébrique G en forme de Greibach engendrant L à partir de son axiome S. Soit N l'ensemble des lettres non-terminales de G. On associe à G le système de récriture $R = \{\ (A,a,\alpha) \mid (A,a\underline{\alpha}) \in G\ \}$ sur (X,N) avec $\underline{\alpha}$ le mot miroir de α ($|\underline{\alpha}| = |\alpha|$ et $\underline{\alpha}(i) = \alpha(|\alpha|-i+1)$). Soit $F = X \cup \{d,f\}$ avec $\rho(d) = \rho(f) = 1$ et $\forall\, x \in X$, $\rho(x) = 2$. Par le théorème 7.1, le graphe $H = D(R,S) \cup \{dS, f\varepsilon\}$ sur F est à motifs. Comme $L = L(H,d,f)$, L est un langage à motifs.

$\Rightarrow$: Soient G un graphe à motifs sur F et $L = L(G,d,f)$. Il existe un système de motifs $\mathbf{S} = \{(X_1,G_1),\ldots,(X_p,G_p)\}$ et un itéré $\mathbf{S}^*$ de $\mathbf{S}$ tels que $Dom(\mathbf{S}^*) = Dom(\mathbf{S})$ et $(X_1,G) \in \mathbf{S}^*$. On peut supposer que $S_{G_i} \cap S_{G_j} = \emptyset$ si $i \neq j$, et on note q_0 un élément disjoint des S_{G_i}. Pour tout i de

$\{1,\ldots,p\}$, on note $\{Y_{i,1},\ldots,Y_{i,q_i}\}$ les q_i éléments de $G_i \cap I(\mathbb{S})(S)$. On construit l'automate à pile $\mathcal{A} = (P,Q,\delta,q_0)$ avec

$P = \{ (i,j) \mid 1 \le i \le p \wedge 1 \le j \le q_i \} \cup \{1,\ldots,p\}$ l'alphabet de pile,

$Q = \bigcup\{ S_{G_i} \mid 1 \le i \le p \} \cup \{q_0\}$ l'ensemble des états,

et $\delta = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \delta_3 \subseteq (P\cup\{\varepsilon\})Q \times F\cup\{\varepsilon\} \times P^*Q$ la fonction de transition définie ci-dessous.

La transition δ_1 permet le positionnement sur les sommets de départ :

$\delta_1 = \{ (iq_0,\varepsilon,(i,j)kq_0) \mid 1 \le i \le p , 1 \le j \le q_i , Y_{i,j}(1) = X_k(1) \} \cup \{ (iq_0,\varepsilon,s) \mid 1 \le i \le p , ds \in G_i \}$.

La transition δ_2 permet le collage et le décollage d'un motif :

$\delta_2 = R \cup R^{-1}$ avec $R = \{ (s,\varepsilon,(i,j)t) \mid \exists\, i,j,k , \exists\, u , Y_{i,j}(u) = s \wedge X_k(1) = Y_{i,j}(1) \wedge X_k(u) = t \}$.

La transition δ_3 permet le déplacement par arête :

$\delta_3 = \{ (s,g,t) \mid \exists\, i , gst \in G_i \}$.

Soit $\{ s \mid \exists\, i , fs \in G_i \}$ l'ensemble des états finaux de $\mathcal{A}$. On vérifie que L est le langage reconnu par $\mathcal{A}$ à partir de $1q_0$ et sur état final. ◆

La preuve du théorème 8.1 est effective au sens où à partir d'un système de motifs, on peut construire de façon effective un automate à pile reconnaissant le langage d'un graphe à motifs engendré par le système. D'après le théorème 7.1 , le passage inverse est aussi effectif.

9. Représentation des hypergraphes à motifs

Pour représenter un (hyper)graphe à motifs sur une feuille de papier de sorte qu'il n'y ait pas de recouvrement, ni de débordement de la feuille, on est obligé de diminuer les tailles des sorties des motifs par rapport aux entrées. Les graphes obtenus sont alors fractals.

Exemple 1 : On considère la grammaire algébrique à la seule équation suivante :

$$A = a + bAcAd \ ,$$

ou bien le système de récriture unitaire $R = \{ (A,a,\varepsilon) , (A,b,dAcA) \}$. Le graphe des transitions $D(R,A)$ de la grammaire à partir de A est engendré par le système de motifs suivant :

$$\{ (\{\varphi st\} , \{ast,bsu,\varphi uv,cvw,\varphi wx,dxt\}) \} \ .$$

On en déduit à la figure 9.1 une représentation de ce graphe.

Exemple 2 : Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la grammaire algébrique G_n définie par :

$$A = a + bA^n \ .$$

Le graphe des transitions de G_n à partir de A est engendré par le système de motifs suivant :

$$\{ (\{\varphi s_1 \ldots s_n\} , \{as_2s_1,bs_2t,\varphi s_2 \ldots s_nt\}) \} \ .$$

La figure 9.2 donne une représentation du graphe des transitions de G_4 .

La figure 9.3 est une représentation du graphe des transitions de la grammaire algébrique à la seule équation suivante :

$$A = a + bAAAc + dAe \ .$$

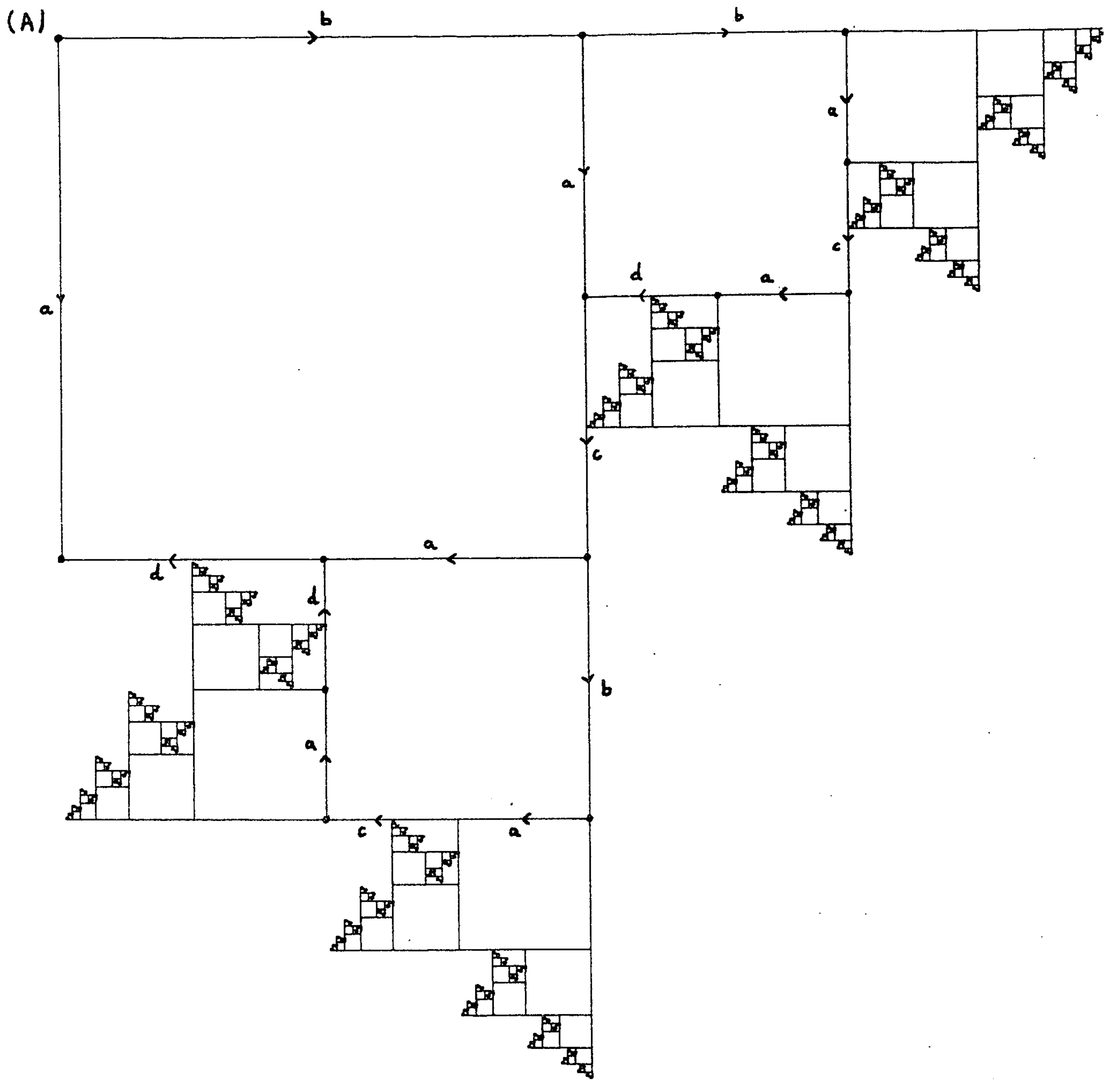


Fig. 9.1 . Graphe des transitions de la grammaire algébrique { (A,a) , (A,bAcAd) } .

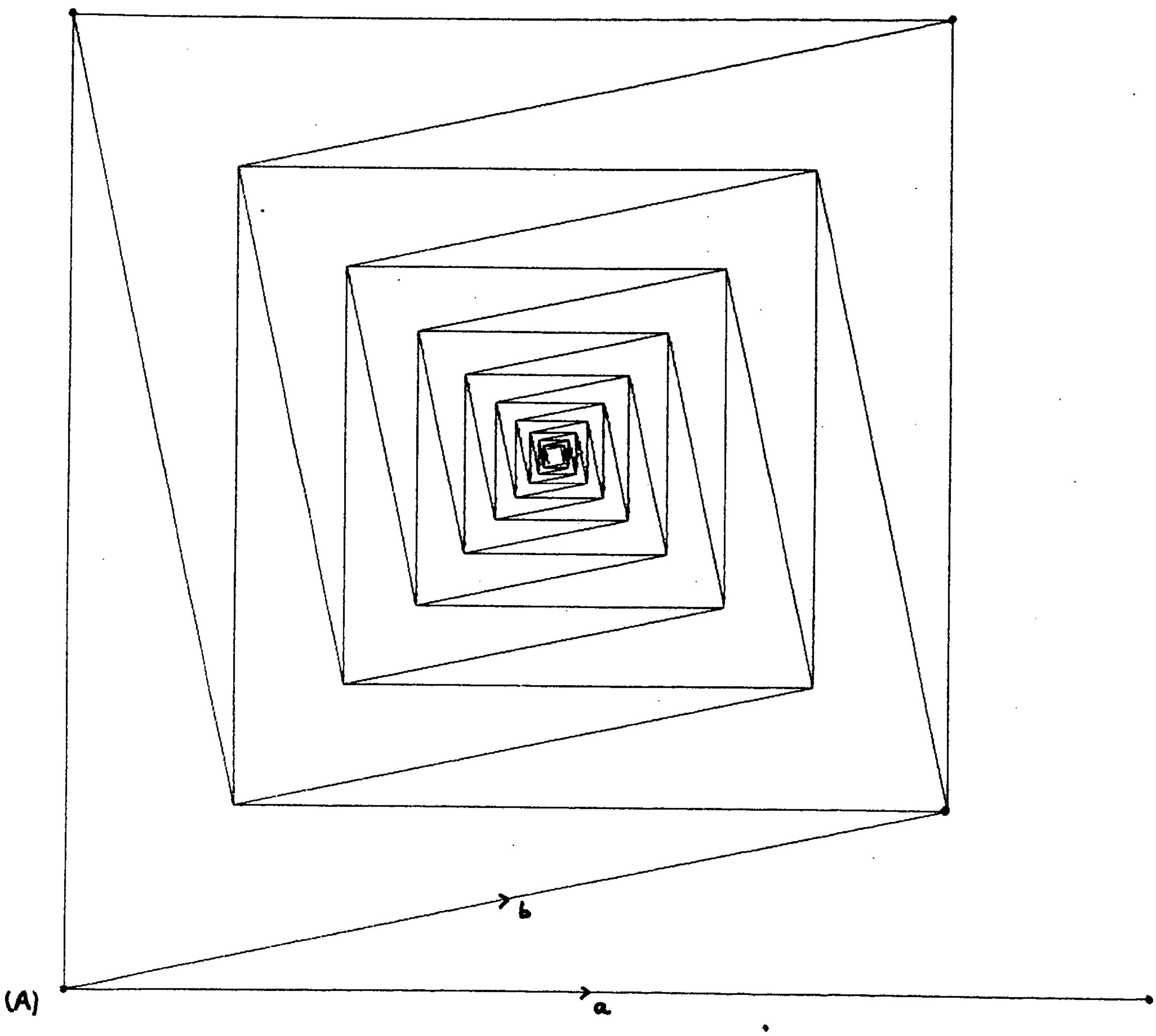


Fig. 9.2 . Graphe des transitions de la grammaire algébrique { (A,a) , (A,bAAAA) } .

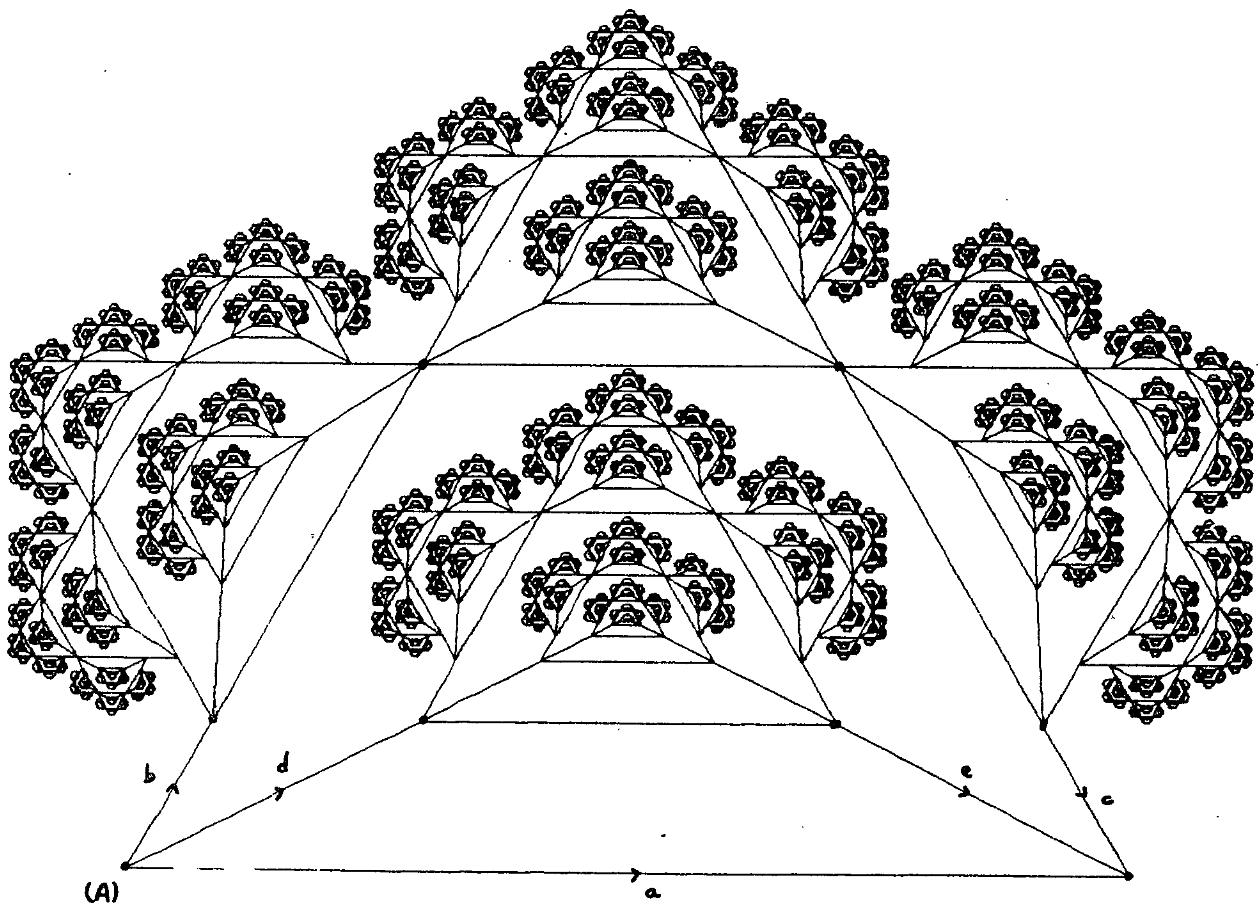


Fig. 9.3 . Graphe des transitions de la grammaire { (A,a) , (A,bAAAc) , (A,dAe) } .

Conclusions

On a vu [Ca 88 b] que l'on peut transformer effectivement toute grammaire algébrique G réduite en une autre grammaire algébrique H réduite de sorte que le graphe canonique des transitions (gauches) de G soit isomorphe à un graphe des transitions de H. D'après le théorème 7.1, on peut donc extraire effectivement un système de motifs du graphe canonique des transitions d'une grammaire algébrique réduite. Pour répondre aux motivations de l'introduction, ce résultat reste à être généralisé aux SPR .

On termine cet article par trois questions. Comme un graphe des transitions d'une grammaire algébrique est un graphe à motifs et que son graphe canonique (si la grammaire est réduite) reste un graphe des transitions d'une grammaire algébrique, on soumet la conjecture suivante :

le graphe canonique d'un graphe à motifs est un graphe à motifs.

La deuxième question résulte de la proposition 6.1 . Le théorème 7.1 caractérise les graphes algébriques en tant que graphes à motifs, qu'en est-il des graphes des transitions des grammaires algébriques ?

La troisième question concerne le théorème 7.1 . Quelle est la complexité de la procédure d'extraction de motifs du graphe des transitions d'une récriture suffixe ? Pour cela, il faut évaluer le nombre de motifs extraits en fonction de la longueur de description de la récriture.

Remerciement

Je remercie Roland Monfort pour sa lecture attentive.

Références

Ba-Be Kl 87 J.C.M. Baeten , J.A. Bergstra , J.W. Klop "Decidability of bisimulation equivalence for processes generating context-free languages" , LNCS 254 , pp 94-111 .

Ba-Co 87 M. Bauderon , B. Courcelle "Graph expressions and graph rewritings" , Math. Systems Theory 20 , pp 83-127 .

Be-Le 79 G. Berry , J.J. Levy "Minimal and optimal computations of recursive programs" , JACM 26 , pp 148-175 .

Ca 88 a D. Caucal "Récritures suffixes de mots" , Rapport INRIA 871 .

Ca 88 b D. Caucal "Graphes canoniques de graphes algébriques" , Rapport INRIA 872 . A paraître dans RAIRO .

Ha-Kr 87 A. Habel , H.J. Kreowski "Some structural aspects of hypergraph languages generated by hyperedge replacement" , LNCS 247 , pp 207-219 .

Mu-Sc 85 D. Muller , P. Schupp "The theory of ends, pushdown automata, and second order logic" , TCS 37 , pp 51-75 .

Ni 75 M. Nivat "On the interpretation of polyadic recursive schemes" , Symposia Mathematica 15 , Academic Press .

LISTE DES DERNIERES PUBLICATIONS INTERNES

PI 437 **EXTENSION OF CHERNIKOVA'S ALGORITHM FOR SOLVING GENERAL MIXED LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS**
Felipe FERNANDEZ, Patrice QUINTON,
38 Pages, Octobre 1988.

PI 438 **A PROPOS DE LA RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE DANS UN CORPS FINI : ALGORITHMES ET MACHINES PARALLELES**
Hervé LE VERGE, Patrice QUINTON, Yves ROBERT, Gilles VILLARD
22 Pages, Novembre 1988.

PI 439 **ALPHA DU CENTAUR : A PROTOTYPE ENVIRONMENT FOR THE DESIGN OF PARALLEL REGULAR ALGORITHMS**
Pierrick GACHET, Patrice QUINTON, Christophe MAURAS
Yannick SAOUTER
20 Pages, Novembre 1988.

PI 440 **CONSTRUCTION METHODIQUE D'UN ALGORITHME REPARTI DE DETECTION DE LA TERMINAISON**
Jean-Michel HELARY, Michel RAYNAL
18 Pages, Décembre 1988.

PI 441 **LES GRAPHES A MOTIFS**
Didier CAUCAL
46 Pages, Décembre 1988.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique